2002 г. март — апрель *т. 57, вып. 2(344)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.218.27+531.19

МАРКОВСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

А. В. Калинкин

В работе рассматриваются марковские процессы со счетным множеством состояний, интерпретируемые как системы из частиц нескольких типов с взаимодействием комплексами. Результат взаимодействия комплекса частиц не зависит от наличия других частиц в системе. Для нахождения точных замкнутых решений первой и второй систем дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей используется аппарат многомерных производящих функций. Приведены примеры применения аналитических методов при рассмотрении реальных процессов превращения частиц из различных областей естественных наук.

Библиография: 126 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 24
Глава 1. Специальные классы марковских процессов 27
§ 1.1. Марковские процессы на множестве состояний $\mathbb{N}^n$ 27
1.1.1. Первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова 28
§ 1.2. Многомерные производящие функции 29
§ 1.3. Марковские процессы с взаимодействием 30
1.3.1. Интерпретация в виде системы с превращениями частиц 31
1.3.2. Второе уравнение для производящей функции переходных вероятностей 31
§ 1.4. Ветвящиеся процессы с взаимодействием 32
1.4.1. Первое уравнение для экспоненциальной производящей функции переходных вероятностей 33
1.4.2. Второе уравнение для производящей функции переходных вероятностей 34
§ 1.5. Ветвящиеся процессы 36
§ 1.6. Класс B_3 36
§ 1.7. Структура множества марковских процессов 37
Глава 2. Приложения в формальной кинетике 37
§ 2.1. Типы процессов рождения и гибели 38
2.1.1. Точные решения уравнений Колмогорова 40
2.1.2. Вероятностные модели цепных реакций 41
§ 2.2. Марковские модели химических реакций 43
2.2.1. Мономолекулярные реакции 43
2.2.2. Бимолекулярные реакции 46

§ 2.3. Стохастический процесс “хищник–жертва” 47
Глава 3. Стационарные и финальные вероятности 48
§ 3.1. Уравнения для предельных вероятностей 49
§ 3.2. Стационарное распределение для системы взаимодействующих частиц при дискретных состояниях 50
§ 3.3. Метод экспоненциальной производящей функции 52
3.3.1. Популяция с двумя полами 52
3.3.2. Процесс эпидемии 55
3.3.3. Нерешенные задачи 58
Глава 4. Третье уравнение Колмогорова 59
§ 4.1. Нелинейное уравнение теории ветвящихся процессов 60
§ 4.2. Ветвящийся процесс с парными взаимодействиями 62
4.2.1. Решение первого и второго уравнений для процесса гибели квадратичного типа 63
4.2.2. Третье уравнение для процесса гибели квадратичного типа 66
4.2.3. Третье уравнение для процесса рождения квадратичного типа 67
§ 4.3. Свойство ветвления и функция Грина для параболических уравнений 69
4.3.1. Нерешенные задачи 70
Глава 5. Принцип тождественности частиц и условия независимости 71
§ 5.1. Цепочка уравнений Боголюбова для марковской системы взаимодействующих частиц 71
§ 5.2. Теорема Финетти–Хинчина о симметрии и кинетическое уравнение 73
§ 5.3. Преобразование фазового пространства траекторий частиц для системы с взаимодействием к множеству деревьев 75
§ 5.4. Свойство ветвления для процесса простой гибели 77
5.4.1. Нерешенные задачи 79
Список литературы 80

Введение

(1) Основным математическим аппаратом современного естествознания остаются дифференциальные уравнения. Условием его применения является рассмотрение детерминированных процессов, или изменения с течением времени *макроскопических* характеристик физических явлений.

Вероятностные рассмотрения в естествознании возникли во второй половине девятнадцатого века и развивались при *микроскопическом* подходе к физическим процессам, прежде всего в газах и химических реакциях. Молекулярно-кинетическая теория рассматривает, например, газ как совокупность огромного числа хаотически движущихся частиц (молекулы, атомы и т. д.), взаимодействующих между собой; взаимодействие осуществляется при столкновении частиц или при помощи тех или иных сил. Были выявлены основные требования, накладываемые на вероятностный подход, первоочередная задача формулируется следующим образом: зная законы поведения частиц, из которых построена система, установить, при предельном переходе к большому числу частиц, законы поведения макроскопического количества вещества;

в частности, феноменологические законы, которые устанавливают связи между непосредственно наблюдаемыми величинами (давление, объем, концентрация реагентов и т. д.) [102]. Рядом физических экспериментов в первой трети двадцатого века была доказана вероятностная природа микромира, что окончательно привело к пониманию необходимости построения адекватного математического аппарата. “После того, как молекулярные воззрения на строение вещества получили господство в физике, появление в физических теориях новых статистических (или вероятностных) методов исследования стало неизбежным” [65; с. 7].

Задача построения основания теории случайных процессов решена в 30–40-е годы прошлого столетия работами, в основном, советских математиков. В дальнейшем развитие теории случайных процессов в значительной степени было связано с изучением определенных в этот период теоретико-вероятностных схем.

Применение вероятностных подходов к исследованию природных процессов характеризовалось постепенным переходом от детерминированных механистических представлений к вероятностным представлениям. Первоначально уравнения механики дополняются чуждыми самой механике вероятностными гипотезами (см. анализ кинетического уравнения Больцмана в [79]). Далее успехи в описании физических процессов новыми методами были связаны с отказом от тех или иных детерминистических представлений и вводом вероятностных определений. Полностью свободны от механистических предположений математические схемы теории случайных процессов, чем можно объяснить как универсальную приложимость этих схем в разных областях естествознания, так и глубину развитых для них аналитических методов. В основании теоретико-вероятностных схем лежит понятие вероятностного пространства событий $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$.

Прогресс в понимании природы микромира в последние десятилетия, появление инструментальных средств исследования молекулярного строения вещества привели к практической необходимости математического описания конкретных микроскопических процессов. Введено значительное число не строго определенных моделей (выполняющих свои функции для узких классов физических явлений), в которых сочетаются элементы детерминированного и вероятностного подходов. Часто эти модели несовместимы с понятием пространства событий; они ограничены в применении аналитических методов. Также исследуются модели на основе классических теоретико-вероятностных схем, в которые включены возникшие в механике понятия, например, при описании взаимодействия потенциал заменяется случайным потенциалом [17], определяются случайные силы и т. д. В таких моделях рассматриваемые для вероятностных схем предельные переходы в тех или иных случаях приводят к детерминированным связям. Трудности в приложениях показывают незавершенность теории случайных процессов; в частности, неоднократно отмечалась необходимость введения взаимодействия в теоретико-вероятностных схемах [110].

Развитие теории случайных процессов определяется основополагающими концепциями теории и рассмотрением на этой основе указанных выше фундаментальных проблем (при недостаточности имеющихся на сегодняшний день физических знаний, служащих базой вероятностного подхода в естественных науках). Цель настоящей работы – показать, что возможные шаги в таком направлении могут опираться на теоретико-вероятностные схемы начального периода развития теории случайных процессов и имеющиеся аналитические методы теории.

(2) В работе рассматривается обобщение определенных в работах [79], [104] марковских процессов рождения и гибели со счетным множеством состояний $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, и непрерывным временем t, $t \in [0, \infty)$. Точка фазового пространства $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ интерпретируется как состояние некоторой физической системы, в котором имеется совокупность частиц $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n$, состоящая из α_1 частиц типа $T_1, \dots, \alpha_n$ частиц типа T_n; переход случайного процесса в другое состояние – результат взаимодействия одного из комплексов частиц S_{ε^i}, $\varepsilon^i \in A$, где $A = \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^l\} \subset \mathbb{N}^n$ – заданное множество. Такие процессы моделируют широкий класс реальных систем взаимодействующих частиц в физике, химии, биологии, в которых новые частицы появляются в результате взаимодействия нескольких существующих в данный момент частиц.

Общее определение марковских процессов с взаимодействием при дискретном фазовом пространстве возникает в результате сопоставления ряда работ, связанных последовательностью литературных ссылок [45]:

Колмогоров, УМН, 1938 (1931)

Леонтович, ЖЭТФ, 1935

Боголюбов, 1946   Колмогоров, Дмитриев, ДАН, 1947   (0.1)

Севастьянов, УМН, 1949

Севастьянов, УМН, 1951

Взаимосвязи между указанными работами рассматриваются в главе 5 обзора с точки зрения следующего набора понятий, данных при исследовании введенных в (0.1) теоретико-вероятностных схем: одночастичные и многочастичные функции распределения; условия независимости; симметрия функций распределения; определение взаимодействия через условия независимости; цепочка уравнений; фазовое пространство траекторий; кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения. По мнению автора [49], [50] анализ совокупности данных понятий применительно к марковским процессам приводит к возможности определенного, вытекающего из схемы (0.1), шага в развитии теории случайных процессов. Для подтверждения этого предположения строятся явные решения линейных уравнений Колмогорова для марковских процессов [46], [56].

В статье приведены как известные решения уравнений Колмогорова, так и новые решения. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием характеризуются применением производящих функций для записи уравнений для переходных вероятностей в виде уравнений в частных производных. Изложенные результаты и постановки задач направлены на вывод замкнутых решений таких уравнений в частных производных. При решении нестационарных и стационарных уравнений Колмогорова получаются выражения для производящих функций искомых вероятностей в виде рядов по специальным функциям; основные аналитические трудности связаны с суммированием этих рядов. Приведение рядов к замкнутой форме дает интегральное представление для производящих функций и при этом подынтегральные выражения преобразуются к имеющему вероятностную интерпретацию виду. Использовались ортогональные многочлены [46], [47], [61], [62], бесселевы функции [43], [46], гипергеометрические функции [44], [59], [62], эллиптические функции [51], [61].

Отметим, что замкнутые решения уравнений Колмогорова дают возможность простого вывода тех или иных предельных теорем для марковских процессов; примеры таких предельных теорем приведены в статье.

Работа состоит из пяти глав. Каждая глава предваряется кратким описанием ее содержания. Глава 1 содержит вывод основных уравнений, на эту главу опираются все последующие главы. Изложение в каждой из глав 2, 3, 4 не зависит от двух других; выводы главы 5 опираются на результаты главы 4. Главы 2 и 5 являются обзорными, главы 3 и 4 основаны на результатах автора. В работе приведены доказательства теорем, анонсированных в кратких заметках [50], [48], [40], и даны некоторые новые результаты.

Автор благодарен Б. А. Севастьянову за постановку задачи о ветвящихся процессах с взаимодействием, Я. Г. Синаю за предложение о написании статьи, А. М. Зубкову и В. А. Малышеву за ряд замечаний, способствовавших улучшению содержания статьи.

Глава 1. Специальные классы марковских процессов

Понятие специального класса марковских процессов введено в работах [71], [104]. В [71] определен класс ветвящихся процессов B_1; в [104] определен класс ветвящихся процессов с взаимодействием B_2 и отмечено соотношение

$$M \supset B_2 \supset B_1, \tag{1.1}$$

где M – множество всех марковских процессов с состояниями $\mathbb{N}^n$. Соотношение (1.1) назовем *структурой* множества марковских процессов с фазовым пространством $\mathbb{N}^n$.

Материалы § 1.1 и § 1.2 являются подготовительными. В § § 1.3–1.6 приведены определения классов B_1, B_2 и других специальных классов однородных марковских процессов со счетным множеством состояний и непрерывным временем. В полном и систематическом виде изложены (см. также § 2.1) возможности записи в виде уравнений в частных производных первой и второй систем дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей с помощью многомерных производящих функций и оператора обобщенного дифференцирования (частично опубликовано в [107], [108]). Каждому классу соответствует определенный вид таких уравнений в частных производных. В § 1.7 дано обобщение структуры (1.1). Результаты главы 1 показывают возможность переноса аналитических методов [106] исследования ветвящихся процессов класса B_1 на другие классы марковских процессов.

§ 1.1. Марковские процессы на множестве состояний $\mathbb{N}^n$

Обозначим $\mathbb{N}^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ \alpha_i = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, n\}$ – множество всех n-мерных векторов с неотрицательными целочисленными компонентами. Далее для $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ приняты обозначения: $\gamma = \alpha - \beta$, если $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1, \dots, \gamma_n = \alpha_n - \beta_n$; $\alpha \geqslant \beta$, если $\alpha_1 \geqslant \beta_1, \dots, \alpha_n \geqslant \beta_n$, и т. п.; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; суммирование $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ обозначается $\sum_\alpha$.

Приведем основные результаты теории однородных марковских процессов со счетным множеством состояний ([30; гл. 7, § 3], [18]). Пусть $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ – марковский процесс на множестве $\mathbb{N}^n$ с непрерывным временем t, $t \in [0, \infty)$. Обозначим переходные вероятности

$$P_{\alpha\beta}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = \beta \mid \xi(0) = \alpha\}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Условие однородности процесса во времени означает, что

$$\mathsf{P}\{\xi(t_1 + t) = \beta \mid \xi(t_1) = \alpha\} = \mathsf{P}\{\xi(t) = \beta \mid \xi(0) = \alpha\}$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ и $t_1, t \in [0, \infty)$. Переходные вероятности процесса $\xi(t)$ удовлетворяют следующим условиям: $P_{\alpha\beta}(t) \geqslant 0$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $t \in [0, \infty)$ (условие неотрицательности); $\sum_\beta P_{\alpha\beta}(t) = 1$ при любом $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $t \in [0, \infty)$ (условие нормированности);

$$P_{\alpha\beta}(t) = \sum_\gamma P_{\alpha\gamma}(t_1) P_{\gamma\beta}(t - t_1)$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ и $0 \leqslant t_1 \leqslant t$, $t_1, t \in [0, \infty)$ (марковское свойство); $P_{\alpha\alpha}(0) = 1$, $P_{\alpha\beta}(0) = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ (начальное условие). Предполагается, что процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен, т.е. выполнены условия $\lim_{t\to 0+} P_{\alpha\alpha}(t) = 1$, $\lim_{t\to 0+} P_{\alpha\beta}(t) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Всегда существуют конечные или бесконечные пределы

$$a_{\alpha\alpha} = \lim_{t\to 0+} \frac{P_{\alpha\alpha}(t) - 1}{t}, \quad a_{\alpha\beta} = \lim_{t\to 0+} \frac{P_{\alpha\beta}(t)}{t} \ (\alpha \neq \beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Эти пределы называются инфинитезимальными характеристиками (плотностями вероятностей переходов) и записываются как $a_{\alpha\beta} = (dP_{\alpha\beta}(t)/dt)|_{t=0+}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Если $\alpha \neq \beta$, то $a_{\alpha\beta}$ конечно; $a_{\alpha\alpha}$ либо конечно, либо равно $-\infty$; во всех случаях $\sum_{\beta\neq\alpha} a_{\alpha\beta} \leqslant -a_{\alpha\alpha}$. С помощью величин $a_{\alpha\beta}$ производится классификация состояний процесса. Состояние α называется мгновенным, если $a_{\alpha\alpha} = -\infty$. Состояние, не являющееся мгновенным, называется регулярным, если $\sum_{\beta\neq\alpha} a_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\alpha}$.

Вероятностный смысл характеристик $\{a_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ следующий. В начальном состоянии α марковский процесс $\xi(t)$ находится до случайного момента времени τ_α с показательным распределением $\mathsf{P}\{\tau_\alpha \leqslant t\} = 1 - e^{a_{\alpha\alpha} t}$. Если $a_{\alpha\alpha} = 0$, то процесс не выходит из состояния α (такое состояние называется поглощающим). Если $a_{\alpha\alpha} < 0$, то в момент τ_α с распределением вероятностей $\{p^\alpha_\beta = -a_{\alpha\beta}/a_{\alpha\alpha},\ \beta \neq \alpha;\ p^\alpha_\alpha = 0\}$ процесс переходит в состояние β; в состоянии β процесс находится случайное время τ_β; далее аналогичная эволюция процесса.

1.1.1. Первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Если все состояния марковского процесса регулярны, то переходные вероятности удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta}(t), \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n, \tag{1.2}$$

с начальными условиями $P_{\alpha\alpha}(0) = 1$, $P_{\alpha\beta}(0) = 0$ при $\alpha \neq \beta$, носящей название первой (обратной) системы дифференциальных уравнений Колмогорова [69]. Пусть все состояния марковского процесса регулярны и при заданном α: $\sum_\gamma P_{\alpha\gamma}(t)a_{\gamma\gamma} > -\infty$. Тогда при данном α выполнена вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова [69] для переходных вероятностей

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_\gamma P_{\alpha\gamma}(t)\, a_{\gamma\beta}, \qquad \beta \in \mathbb{N}^n, \tag{1.3}$$

с начальными условиями $P_{\alpha\alpha}(0) = 1$, $P_{\alpha\beta}(0) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Условия существования и единственности решения для первой и второй систем уравнений изложены в [26; т. 1, гл. 17, § 9], [30], [18]. При данных выше требованиях на коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ всегда существует единственное *минимальное решение* – решение, удовлетворяющее обеим системам дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3), условиям неотрицательности и марковости, но для которого $\sum_\beta P_{\alpha\beta}(t) \leqslant 1$. Достаточным условием выполнения для минимального решения тождества $\sum_\beta P_{\alpha\beta}(t) \equiv 1$ при всех $\alpha \in \mathbb{N}^n$ является, например, условие ограниченности коэффициентов, $|a_{\alpha\beta}| < C < \infty$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ [26]. Далее в работе для некоторых рассматриваемых уравнений Колмогорова решение не единственно; в таких случаях приводится выражение для минимального решения.

§ 1.2. Многомерные производящие функции

Обозначим a_α значение в точке α числовой функции, определенной на $\mathbb{N}^n$. Многомерной производящей функцией $F(s_1,\dots,s_n)$, соответствующей $\{a_\alpha\}$, называется сумма ряда

$$F(s_1,\dots,s_n) = \sum_\alpha a_\alpha s_1^{\alpha_1}\cdots s_n^{\alpha_n}.$$

Экспоненциальной многомерной производящей функцией $G(z_1,\dots,z_n)$, соответствующей $\{a_\alpha\}$, называется сумма ряда

$$G(z_1,\dots,z_n) = \sum_\alpha \frac{z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}a_\alpha.$$

Далее применяется сокращенная запись $s = (s_1,\dots,s_n)$, $s^\alpha = s_1^{\alpha_1}\cdots s_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$. Для вектора $s = (s_1,\dots,s_n)$ употребляется обозначение 1, если все его компоненты равны единице; через $|s|$ обозначается вектор с компонентами $|s_i|$. Аналогичные обозначения и для вектора $z = (z_1,\dots,z_n)$. Полагаем $zs = z_1s_1 + \dots + z_ns_n$. Вводим обозначения:

$$\frac{\partial^\alpha F(s)}{\partial s^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}F(s_1,\dots,s_n)}{\partial s_1^{\alpha_1}\cdots\partial s_n^{\alpha_n}}\,;$$

$\alpha^{[\beta]} = \alpha_1^{[\beta_1]}\cdots\alpha_n^{[\beta_n]}$, где $\alpha_i^{[\beta_i]} = \alpha_i(\alpha_i-1)\cdots(\alpha_i-\beta_i+1)$, $i = 1,\dots,n$. Если $F(s)$ есть производящая функция для $\{a_\alpha\}$, то $\partial^\beta F(s)/\partial s^\beta$ есть производящая функция для $\{\alpha^{[\beta]}a_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Пусть производящие функции $F(s)$, $G(z)$ имеют некоторые области сходимости. Тогда между $\{a_\alpha\}$ и $F(s)$, $G(z)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие:

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\,\frac{\partial^\alpha F(0)}{\partial s^\alpha}\,; \qquad a_\alpha = \frac{\partial^\alpha G(0)}{\partial z^\alpha}\,.$$

Производящая функция называется положительной, если $a_\alpha \geqslant 0$ при $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Положительная производящая функция $F(s)$ называется вероятностной, если $F(1)=1$. Вероятностная производящая функция $F(s)$ соответствует распределению вероятностей $\{a_\alpha\}$ на $\mathbb{N}^n$. Можно соотносить вероятностную производящую функцию не с распределением $\{a_\alpha\}$, а с каким-либо случайным вектором $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, имеющим $\{a_\alpha\}$ своим распределением вероятностей. С помощью вектора ξ дается эквивалентное определение вероятностной производящей функции: $F_\xi(s)=\mathsf{E}s^\xi$. Математическое ожидание $\mathsf{E}\xi^{[\beta]}$ называется факториальным моментом порядка $|\beta|=\beta_1+\dots+\beta_n$. Можно показать, что

$$\mathsf{E}\xi^{[\beta]}=\frac{\partial^\beta F_\xi(1)}{\partial s^\beta}, \tag{1.4}$$

где производная в точке $s=1$ понимается как производная слева по всем координатам s_i, $i=1,\dots,n$. В частности, для математических ожиданий компонент случайного вектора ξ имеем $\mathsf{E}\xi_i=(\partial F_\xi(s)/\partial s_i)|_{s=1}$, $i=1,\dots,n$. Выражение для дисперсии имеет вид

$$\mathsf{D}\xi_i=\frac{\partial^2 F_\xi(1)}{\partial s_i^2}+\frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i}-\left(\frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i}\right)^2, \qquad i=1,\dots,n. \tag{1.5}$$

Мультипликативное свойство. Если $\xi^{(1)},\dots,\xi^{(m)}$ – независимые случайные векторы, то производящая функция их суммы равна произведению производящих функций слагаемых, т.е.

$$F_{\xi^{(1)}+\dots+\xi^{(m)}}(s)=F_{\xi^{(1)}}(s)\cdots F_{\xi^{(m)}}(s). \tag{1.6}$$

В частности, если $\xi^{(1)},\dots,\xi^{(m)}$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы, то

$$F_{\xi^{(1)}+\dots+\xi^{(m)}}(s)=F^m_{\xi^{(1)}}(s). \tag{1.7}$$

Доказательство (1.4)–(1.7) и другие сведения о многомерных производящих функциях изложены в [106; гл. 4, § 1].

§ 1.3. Марковские процессы с взаимодействием

Пусть фиксировано конечное множество векторов $A=\{\varepsilon^i\in\mathbb{N}^n, i=1,\dots,l\}$. Каждому вектору ε^i сопоставим распределение вероятностей на $\mathbb{N}^n$, $\{p^i_\gamma\geqslant 0, \sum_\gamma p^i_\gamma=1; p^i_{\varepsilon^i}=0\}$, и набор чисел $\{\varphi^i_\alpha\geqslant 0,\ \alpha\in\mathbb{N}^n;\ \varphi^i_\alpha=0$, если при некотором k $\alpha_k<\varepsilon^i_k\}$. Для марковского процесса с взаимодействием $\xi(t)$ определяем инфинитезимальные характеристики равенствами

$$a_{\alpha\alpha}=-\sum_{i=1}^l\varphi^i_\alpha, \quad a_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^l\varphi^i_\alpha p^i_{\beta-\alpha+\varepsilon^i}\ \ (\alpha\neq\beta), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n. \tag{1.8}$$

Таким образом, марковский процесс с взаимодействием задается набором $\varepsilon^1,\{p^1_\gamma\}$, $\{\varphi^1_\alpha\},\dots,\varepsilon^l,\{p^l_\gamma\},\{\varphi^l_\alpha\}$.

Обозначим M_1 множество процессов с взаимодействием, $M_1\subset M$. Заметим, что марковские процессы с конечным числом состояний принадлежат множеству M_1. Отметим также, что произвольный марковский процесс из M интерпретируется как процесс с бесконечным множеством $A=\mathbb{N}^n$, где каждому вектору $\varepsilon\in\mathbb{N}^n$ сопоставлены распределение вероятностей на $\mathbb{N}^n$, $\{p_\gamma^\varepsilon = -a_{\varepsilon\gamma}/a_{\varepsilon\varepsilon},\ \gamma \neq \varepsilon;\ p_\varepsilon^\varepsilon = 0\}$, и набор чисел $\{\varphi_\alpha^\varepsilon = 0, \alpha \neq \varepsilon; \varphi_\varepsilon^\varepsilon = -a_{\varepsilon\varepsilon}\}$.

Специальные классы марковских процессов выделяются из множества M_1 указанием типа функций $\varphi^1, \ldots, \varphi^l$ (ср. § 2.1), задающих наборы чисел $\{\varphi_\alpha^1 = \varphi^1(\alpha), \alpha \in \mathbb{N}^n\}, \ldots, \{\varphi_\alpha^l = \varphi^l(\alpha), \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.

1.3.1. Интерпретация в виде системы с превращениями частиц. Физическая трактовка марковского процесса $\xi(t)$ из множества M_1 состоит в следующем [104], [16]. Событие $\{\xi(t) = \alpha\}$ можно интерпретировать как такое состояние некоторой системы, в котором в момент времени t имеется совокупность S_α частиц, состоящая из α_1 частиц типа T_1, α_2 частиц типа $T_2, \ldots, \alpha_n$ частиц типа T_n: $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \cdots + \alpha_n T_n$. Зададим l комплексов взаимодействия частиц S_{ε^i}, соответствующих векторам $\varepsilon^i \in A$. Через случайное время τ_α^i, $\mathsf{P}\{\tau_\alpha^i \leqslant t\} = 1 - e^{-\varphi_\alpha^i t}$, происходит взаимодействие комплекса частиц S_{ε^i}. В этот момент из α_1 частиц типа T_1 выбирается ε_1^i частиц, из α_2 частиц типа T_2 выбирается ε_2^i частиц, $\ldots$, из α_n частиц типа T_n выбирается ε_n^i частиц, и этот комплекс частиц S_{ε^i} с распределением вероятностей $\{p_\gamma^i\}$ заменяется совокупностью S_γ новых частиц. Система из состояния S_α, соответствующего вектору α, переходит в состояние $S_{\alpha-\varepsilon^i+\gamma}$, соответствующее вектору $\alpha - \varepsilon^i + \gamma$, и далее аналогичная эволюция системы частиц. В состоянии S_α система находится случайное время τ_α, пока не произойдет какое-либо из l взаимодействий, т.е. $\tau_\alpha = \min(\tau_\alpha^1, \ldots, \tau_\alpha^l)$. Предполагается, что случайные величины $\tau_\alpha^1, \ldots, \tau_\alpha^l$ независимы. Тогда $\mathsf{P}\{\tau_\alpha \leqslant t\} = 1 - e^{-(\varphi_\alpha^1 + \cdots + \varphi_\alpha^l)t}$ и вероятность, что произошло взаимодействие комплекса частиц S_{ε^i}, при условии, что взаимодействие произошло, равна $\varphi_\alpha^i \left(\sum_{i=1}^l \varphi_\alpha^i\right)^{-1}$ [12; гл. 1, § 2]. Возможные превращения частиц в такой системе представим *схемой взаимодействий*:

$$\begin{cases} \varepsilon_1^1 T_1 + \varepsilon_2^1 T_2 + \cdots + \varepsilon_n^1 T_n \to \gamma_1^1 T_1 + \gamma_2^1 T_2 + \cdots + \gamma_n^1 T_n, \\ \quad \cdots \\ \varepsilon_1^i T_1 + \varepsilon_2^i T_2 + \cdots + \varepsilon_n^i T_n \to \gamma_1^i T_1 + \gamma_2^i T_2 + \cdots + \gamma_n^i T_n, \\ \quad \cdots \\ \varepsilon_1^l T_1 + \varepsilon_2^l T_2 + \cdots + \varepsilon_n^l T_n \to \gamma_1^l T_1 + \gamma_2^l T_2 + \cdots + \gamma_n^l T_n, \end{cases} \tag{1.9}$$

где случайный вектор $\gamma^i = (\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_n^i)$ имеет распределение $\{p_\gamma^i\}$, $i = 1, \ldots, l$.

1.3.2. Второе уравнение для производящей функции переходных вероятностей. Рассмотрим переходные вероятности $P_{\alpha\beta}(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, марковского процесса с взаимодействием. Введем многомерные производящие функции:

$$F_\alpha(t;s) = \sum_\beta P_{\alpha\beta}(t) s^\beta, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n; \qquad h_i(s) = \sum_\gamma p_\gamma^i s^\gamma, \quad i = 1, \ldots, l; \ |s| < 1. \tag{1.10}$$

Заметим, что $F_\alpha(t;s)$ – аналитическая функция переменных $s_1, \ldots, s_n$ в рассматриваемой области, так как $|F_\alpha(t;s)| \leqslant \sum_\beta P_{\alpha\beta}(t)|s_1|^{\beta_1} \cdots |s_n|^{\beta_n} \leqslant \sum_\beta P_{\alpha\beta}(t) \leqslant 1$. Далее нам потребуется оператор Гельфонда–Леонтьева обобщенного дифференцирования [29], [103], определенный на аналитических в окрестности нуля функциях:

$$D_i\left(\sum_\beta a_\beta s^\beta\right) = \sum_{\beta \geqslant \varepsilon^i} a_\beta \varphi_\beta^i s^{\beta - \varepsilon^i}, \qquad i = 1, \ldots, l.$$

По определению все состояния марковского процесса с взаимодействием регулярны; пусть выполнены условия п. 1.1.1 для второй системы уравнений.

Утверждение 1.1. *Вторая система дифференциальных уравнений Колмогорова для марковского процесса с взаимодействием записывается в компактном виде*

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} \bigl(h_i(s) - s^{\varepsilon_i}\bigr) D_i(F_\alpha(t;s)), \qquad F_\alpha(0;s) = s^\alpha. \tag{1.11}$$

Доказательство. Подставляя выражения для инфинитезимальных характеристик (1.8) в систему (1.3), получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} &= \sum_\beta \frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} s^\beta = \sum_\beta \biggl(\sum_\gamma P_{\alpha\gamma}(t) a_{\gamma\beta}\biggr) s^\beta \\
&= \sum_{i=1}^{l} \biggl(\sum_{\gamma \geqslant \varepsilon^i} \sum_{\beta-\gamma+\varepsilon^i \geqslant 0} P_{\alpha\gamma}(t)\varphi^i_\gamma p^i_{\beta-\gamma+\varepsilon^i} s^\beta - \sum_{\beta \geqslant \varepsilon^i} P_{\alpha\beta}(t)\varphi^i_\beta s^\beta\biggr) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \sum_{\gamma \geqslant \varepsilon^i} P_{\alpha\gamma}(t)\varphi^i_\gamma s^{\gamma-\varepsilon^i} \biggl(\sum_{\beta-\gamma+\varepsilon^i \geqslant 0} p^i_{\beta-\gamma+\varepsilon^i} s^{\beta-\gamma+\varepsilon^i} - s^{\varepsilon_i}\biggr) \\
&= \sum_{i=1}^{l} D_i(F_\alpha(t;s))\bigl(h_i(s) - s^{\varepsilon^i}\bigr).
\end{aligned}$$

Утверждение 1.1 доказано.

Вопрос о равносильности системы уравнений (1.3) и уравнения (1.11) рассматривается для конкретных наборов чисел $\{\varphi^1_\alpha\}, \dots, \{\varphi^l_\alpha\}$.

§ 1.4. Ветвящиеся процессы с взаимодействием

Специальный класс марковских процессов B_2 выделяется из множества M_1 следующими условиями на $\{\varphi^1_\alpha\}, \dots, \{\varphi^l_\alpha\}$. Заданы множество $A = \{\varepsilon^i = (\varepsilon^i_1, \dots, \varepsilon^i_n),\ i = 1, \dots, l\}$, распределения вероятностей $\{p^i_\gamma\}$, $i = 1, \dots, n$, и наборы чисел

$$\varphi^i_\alpha = \lambda_i \prod_{j=1}^{n} \alpha_j(\alpha_j - 1)\cdots(\alpha_j - \varepsilon^i_j + 1) = \lambda_i \alpha^{[\varepsilon^i]}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

где $\lambda_i > 0$ – коэффициенты пропорциональности, $i = 1, \dots, n$. Инфинитезимальные характеристики $\{a_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ ветвящегося процесса с взаимодействием определяются равенствами (1.8).

Указанный выбор чисел $\{\varphi^i_\alpha\}$ предложен в [104]. Пусть марковский процесс находится в состоянии $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, что соответствует наличию совокупности частиц S_α. Предполагается, что за время Δt, $\Delta t \to 0$, вероятность $\varphi^i_\alpha \Delta t + o(\Delta t)$ взаимодействия комплекса частиц S_{ε^i} пропорциональна числу $C^{\varepsilon^i_1}_{\alpha_1}$ сочетаний ε^i_1 частиц типа T_1 из имеющихся α_1 частиц типа $T_1, \dots,$ пропорциональна числу $C^{\varepsilon^i_n}_{\alpha_n}$ сочетаний ε^i_n частиц типа T_n из имеющихся α_n частиц типа T_n.

2 УМН, т. 57, вып. 2

1.4.1. Первое уравнение для экспоненциальной производящей функции переходных вероятностей. Вводим экспоненциальные производящие функции переходных вероятностей

$$G_\beta(t;z)=\sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!}P_{\alpha\beta}(t), \qquad \beta\in\mathbb{N}^n, \tag{1.12}$$

и линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$h_i\biggl(\frac{\partial}{\partial z}\biggr)=\sum_\gamma p_\gamma^i\frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}, \qquad i=1,\dots,l.$$

При любом β $G_\beta(t;z)$ – функция, аналитическая по переменным $z_1,\dots,z_n$, так как

$$|G_\beta(t;z)|\leqslant\sum_\alpha\frac{|z_1|^{\alpha_1}\cdots|z_n|^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}P_{\alpha\beta}(t)\leqslant e^{|z_1|+\dots+|z_n|}. \tag{1.13}$$

Теорема 1.2 [108]. *Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_\beta(t;z)$ ветвящегося процесса с взаимодействием при любом $\beta\in\mathbb{N}^n$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial G_\beta(t;z)}{\partial t}=\sum_{i=1}^l\lambda_i z^{\varepsilon^i}\biggl(h_i\biggl(\frac{\partial}{\partial z}\biggr)-\frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial z^{\varepsilon^i}}\biggr)G_\beta(t;z), \qquad G_\beta(0;z)=\frac{z^\beta}{\beta!}\,. \tag{1.14}$$

Доказательство. Для вывода уравнения (1.14) свертывается с помощью многомерной производящей функции (1.12) первая система дифференциальных уравнений (1.2) для ветвящегося процесса с взаимодействием:

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt}=\sum_{i=1}^l\sum_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i\geqslant0}\lambda_i\alpha^{[\varepsilon^i]}p^i_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i}P_{\gamma\beta}(t)-\sum_{i=1}^l\lambda_i\alpha^{[\varepsilon^i]}P_{\alpha\beta}(t), \quad \alpha\in\mathbb{N}^n; \tag{1.15}$$

начальные условия $P_{\alpha\alpha}(0)=1$, $P_{\alpha\beta}(0)=0$ при $\alpha\neq\beta$. Из (1.13) следует, что ряд (1.12) сходится абсолютно и равномерно по t при фиксированном z. Производная $\partial G_\beta(t;z)/\partial t$ равна сумме ряда

$$\sum_\alpha\frac{z^\alpha}{\alpha!}\,\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt}\,,$$

поскольку последний сходится абсолютно и равномерно по t. Действительно, из (1.15) следуют неравенства:

$$\begin{aligned}
&\biggl|\sum_{|\alpha|\leqslant L}\frac{z^\alpha}{\alpha!}\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt}\biggr| \\
&\quad=\biggl|\sum_{|\alpha|\leqslant L}\frac{z^\alpha}{\alpha!}\sum_{i=1}^l\sum_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i\geqslant0}\lambda_i\alpha^{[\varepsilon^i]}p^i_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i}P_{\gamma\beta}(t)-\sum_{|\alpha|\leqslant L}\frac{z^\alpha}{\alpha!}\sum_{i=1}^l\lambda_i\alpha^{[\varepsilon^i]}P_{\alpha\beta}(t)\biggr| \\
&\quad\leqslant\sum_{i=1}^l\lambda_i\sum_{\alpha\geqslant\varepsilon^i}\frac{|z|^\alpha}{(\alpha-\varepsilon^i)!}\sum_r p_r^i+\sum_{i=1}^l\lambda_i\sum_{\alpha\geqslant\varepsilon^i}\frac{|z|^\alpha}{(\alpha-\varepsilon^i)!} \\
&\quad=2e^{|z_1|+\dots+|z_n|}\sum_{i=1}^l\lambda_i|z|^{\varepsilon^i}<\infty;
\end{aligned}$$

и применяем признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. После сделанных замечаний законна следующая цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_\beta(t;z)}{\partial t} &= \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!}\,\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!}\left(\sum_\gamma a_{\alpha\gamma}P_{\gamma\beta}(t)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{l}\lambda_i z^{\varepsilon^i}\left(\sum_{\alpha\geqslant\varepsilon^i}\ \sum_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i\geqslant 0}\frac{z^{\alpha-\varepsilon^i}}{(\alpha-\varepsilon^i)!}p^i_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i}P_{\gamma\beta}(t) - \sum_{\alpha\geqslant\varepsilon^i}\frac{z^{\alpha-\varepsilon^i}}{(\alpha-\varepsilon^i)!}P_{\alpha\beta}(t)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{l}\lambda_i z^{\varepsilon^i}\left(\sum_r p^i_r\sum_{\gamma-r\geqslant 0}\frac{z^{\gamma-r}}{(\gamma-r)!}P_{\gamma\beta}(t) - \sum_{\alpha-\varepsilon^i\geqslant 0}\frac{z^{\alpha-\varepsilon^i}}{(\alpha-\varepsilon^i)!}P_{\alpha\beta}(t)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{l}\lambda_i z^{\varepsilon^i}\left(\sum_r p^i_r\frac{\partial^r G_\beta(t;z)}{\partial z^r} - \frac{\partial^{\varepsilon^i}G_\beta(t;z)}{\partial z^{\varepsilon^i}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{l}\lambda_i z^{\varepsilon^i}\left(h_i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial z^{\varepsilon^i}}\right)G_\beta(t;z).
\end{aligned}
$$

Условие $G_\beta(0;z) = z^\beta/\beta!$ следует из начального условия для системы (1.15). Теорема 1.2 доказана.

1.4.2. Второе уравнение для производящей функции переходных вероятностей. Используем многомерные производящие функции (1.10).

Теорема 1.3 [104]. *Производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t;s)$ ветвящегося процесса с взаимодействием при любом $\alpha\in\mathbb{N}^n$ удовлетворяет при $|s|\leqslant 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$
\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l}\lambda_i\bigl(h_i(s) - s^{\varepsilon^i}\bigr)\frac{\partial^{\varepsilon^i}F_\alpha(t;s)}{\partial s^{\varepsilon^i}}\,, \qquad F_\alpha(0;s) = s^\alpha. \tag{1.16}
$$

Доказательство. Вторая система дифференциальных уравнений (1.3) для ветвящегося процесса с взаимодействием получает вид:

$$
\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{l}\ \sum_{\beta-\gamma+\varepsilon^i\geqslant 0}P_{\alpha\gamma}(t)\lambda_i\gamma^{[\varepsilon^i]}p^i_{\beta-\gamma+\varepsilon^i} - \sum_{i=1}^{l}P_{\alpha\beta}(t)\lambda_i\beta^{[\varepsilon^i]},\quad \beta\in\mathbb{N}^n. \tag{1.17}
$$

Ряд $F_\alpha(t;s) = \sum_\beta P_{\alpha\beta}(t)s^\beta$ сходится абсолютно и равномерно по t при фиксированном s, $|s| < 1$. Ряд $\sum_\beta (dP_{\alpha\beta}(t)/dt)s^\beta$ сходится абсолютно и равномерно по t при

$|s| < 1$ – его сумма равна $\partial F_\alpha(t;s)/\partial t$. Действительно, из (1.17) следуют неравенства: при $|s| < 1$

$$\begin{aligned}
&\biggl|\sum_{|\beta|\leqslant L}\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt}s^\beta\biggr| \\
&\quad=\biggl|\sum_{|\beta|\leqslant L}\sum_{i=1}^{l}\sum_{\beta-\gamma+\varepsilon^i\geqslant 0}P_{\alpha\gamma}(t)\lambda_i\gamma^{[\varepsilon^i]}p^i_{\beta-\gamma+\varepsilon^i}s^\beta-\sum_{|\beta|\leqslant L}\sum_{i=1}^{l}P_{\alpha\beta}(t)\lambda_i\beta^{[\varepsilon^i]}s^\beta\biggr| \\
&\quad\leqslant\sum_{i=1}^{l}\lambda_i|s|^{\varepsilon^i}\sum_{\gamma\geqslant\varepsilon^i}\gamma^{[\varepsilon^i]}|s|^{\gamma-\varepsilon^i}\sum_r p^i_r+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i|s|^{\varepsilon^i}\sum_{\beta\geqslant\varepsilon^i}\beta^{[\varepsilon^i]}|s|^{\beta-\varepsilon^i} \\
&\quad=2\sum_{i=1}^{l}\lambda_i|s|^{\varepsilon^i}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-|s_j|}<\infty;
\end{aligned}$$

и используем признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Получаем уравнение (1.16), свертывая систему (1.17):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t}&=\sum_\beta\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt}s^\beta=\sum_\beta\biggl(\sum_\gamma P_{\alpha\gamma}(t)a_{\gamma\beta}\biggr)s^\beta \\
&=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\biggl(\sum_{\gamma\geqslant\varepsilon^i}\sum_{\beta-\gamma+\varepsilon^i\geqslant 0}P_{\alpha\gamma}(t)\gamma^{[\varepsilon^i]}p^i_{\beta-\gamma+\varepsilon^i}s^\beta-\sum_{\beta\geqslant\varepsilon^i}P_{\alpha\beta}(t)\beta^{[\varepsilon^i]}s^\beta\biggr) \\
&=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\sum_{\gamma\geqslant\varepsilon^i}P_{\alpha\gamma}(t)\gamma^{[\varepsilon^i]}s^{\gamma-\varepsilon^i}\biggl(\sum_{\beta-\gamma+\varepsilon^i\geqslant 0}p^i_{\beta-\gamma+\varepsilon^i}s^{\beta-\gamma+\varepsilon^i}-s^{\varepsilon_i}\biggr) \\
&=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\frac{\partial^{\varepsilon^i}F_\alpha(t;s)}{\partial s^{\varepsilon^i}}\bigl(h_i(s)-s^{\varepsilon^i}\bigr).
\end{aligned}$$

Мы показали справедливость уравнения (1.16) при $|s| < 1$. Справедливость уравнения при $|s| \leqslant 1$ является следствием непрерывности. Теорема 1.3 доказана.

Введем двойную производящую функцию

$$\mathscr{F}(t;z;s)=\sum_\alpha\frac{z^\alpha}{\alpha!}F_\alpha(t;s)=\sum_{\alpha,\beta}\frac{z^\alpha}{\alpha!}P_{\alpha\beta}(t)s^\beta=\sum_\beta G_\beta(t;z)s^\beta.$$

Следствие 1.4. *Производящая функция переходных вероятностей $\mathscr{F}(t;z;s)$ ветвящегося процесса с взаимодействием удовлетворяет при $|s| \leqslant 1$ уравнениям*

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial t}=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i z^{\varepsilon^i}\biggl(h_i\biggl(\frac{\partial}{\partial z}\biggr)-\frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial z^{\varepsilon^i}}\biggr)\mathscr{F}, \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial t}=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\bigl(h_i(s)-s^{\varepsilon^i}\bigr)\frac{\partial^{\varepsilon^i}\mathscr{F}}{\partial s^{\varepsilon^i}}, \quad \mathscr{F}(0;z;s)=e^{zs}. \tag{1.19}$$

§ 1.5. Ветвящиеся процессы

Специальный класс марковских процессов B_1 выделяется из класса B_2 условиями $|\varepsilon^i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, l$. Пусть для определенности $A = \{\varepsilon^1 = (1, 0, \ldots, 0), \varepsilon^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon^l = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\}$. Тогда $\varphi^i_\alpha = \lambda_i \alpha_i$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $i = 1, \ldots, l$, и второе уравнение Колмогорова (1.16) получает вид

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \big(h_i(s) - s_i\big) \frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_i}, \qquad F_\alpha(0;s) = s^\alpha. \tag{1.20}$$

Решение уравнения в частных производных первого порядка (1.20) обладает *свойством ветвления* [106; гл. 4, § 2, формула (3)]:

$$F_\alpha(t;s) = F^{\alpha_1}_{\varepsilon^1}(t;s) F^{\alpha_2}_{\varepsilon^2}(t;s) \cdots F^{\alpha_l}_{\varepsilon^l}(t;s) s^{\alpha_{l+1}}_{l+1} \cdots s^{\alpha_n}_n, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{1.21}$$

Свойство ветвления – основное свойство, выделяющее из марковских процессов класс ветвящихся процессов, – состоит в том, что если состояние процесса интерпретировать как наличие совокупности частиц, то частицы, существующие в момент времени t_1, в любой следующий момент $t_1 + t$, $t > 0$, эволюционируют и дают новые частицы независимо друг от друга. Это следует из сравнения формулы (1.21) и свойств (1.6) и (1.7) производящих функций [106; гл. 4, § 2].

Теорема 1.5. *Производящие функции $F_{\varepsilon^1}(t;s), \ldots, F_{\varepsilon^l}(t;s)$ переходных вероятностей ветвящегося процесса удовлетворяют при $|s| \leqslant 1$ системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{\varepsilon^1}(t;s)}{\partial t} = \lambda_1 \big(h_1(F_{\varepsilon^1}(t;s), \ldots, F_{\varepsilon^l}(t;s), s_{l+1}, \ldots, s_n) - F_{\varepsilon^1}(t;s)\big); \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{\partial F_{\varepsilon^l}(t;s)}{\partial t} = \lambda_l \big(h_l(F_{\varepsilon^1}(t;s), \ldots, F_{\varepsilon^l}(t;s), s_{l+1}, \ldots, s_n) - F_{\varepsilon^l}(t;s)\big), \end{cases} \tag{1.22}$$

с начальными условиями $F_{\varepsilon^1}(0;s) = s_1, \ \ldots, \ F_{\varepsilon^l}(0;s) = s_l$.

Доказательство основано на свойстве ветвления (1.21) (см. [106; гл. 4, § 3, теорема 3]). Для случая $n = 1$ вывод нелинейного уравнения приведен в § 5.1.

Частицы типов $T_{l+1}, \ldots, T_n$ называются *финальными* [106; гл. 5]. Если множеству A принадлежит вектор $\varepsilon^0 = (0, \ldots, 0)$ – тогда $\varphi^0_\alpha = \lambda_0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, то ветвящийся процесс называется процессом *с иммиграцией* частиц [106; гл. 7].

Систематическое изложение теории ветвящихся случайных процессов дано в монографии [106]. Обзор результатов теории ветвящихся процессов содержит работа [122].

§ 1.6. Класс B_3

Приведем определение следующего класса марковских процессов [42]. Задано множество $A = \{\varepsilon^1 = (1, 0, \ldots, 0), \varepsilon^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon^l = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\}$; каждому вектору ε^i сопоставлено распределение вероятностей $\{p^i_\gamma\}$; наборы чисел

$\{\varphi_\alpha^i\}$ определим следующим образом. Пусть $U_i(x)$ – функция распределения неотрицательной случайной величины, и пусть $U_i(x)$ – безгранично делимая функция распределения; $i = 1, \dots, l$. Известно [26; т. 2, гл. 13, § 7], что ее преобразование Лапласа имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-px}\, U_i\{dx\} = e^{-\psi_i(p)}, \qquad p \geqslant 0,$$

где $\psi_i(p) = \int_0^\infty x^{-1}(1 - e^{-px})\, P_i\{dx\}$ и P_i – такая мера, что $\int_1^\infty x^{-1}\, P_i\{dx\} < \infty$. Положим $\varphi_\alpha^i = \psi_i(\alpha_i)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $i = 1, \dots, l$, и определим инфинитезимальные характеристики $\{a_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ марковского процесса из класса B_3 равенствами (1.8). Выбор чисел $\{\varphi_\alpha^1\}, \dots, \{\varphi_\alpha^l\}$ связан со свойствами процессов рождения и гибели степенного типа, изложенными далее в п. 2.1.2 и § 5.4 (см. также [42]). Класс процессов B_3 наиболее близок к классу ветвящихся процессов B_1: если распределение $U_i(x)$ сосредоточено в точке λ_i $(\lambda_i > 0)$, то $\varphi_\alpha^i = \lambda_i \alpha_i$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$; $i = 1, \dots, l$, – получаем процесс из класса B_1.

§ 1.7. Структура множества марковских процессов

Обобщение структуры (1.1) для марковских процессов со счетным множеством состояний получает вид:

$$\begin{array}{ccccc} M & \supset & M_1 & \supset & B_2 \\ & & \cup & & \cup \\ & & B_3 & \supset & B_1 \end{array}, \qquad B_2 \cap B_3 = B_1, \tag{1.23}$$

где B_1 – класс марковских ветвящихся процессов, B_2 – класс ветвящихся процессов с взаимодействием, класс B_3 определен в § 1.6 и множество M_1 описано в § 1.3. Множества M_1, B_2, B_1, B_3 определены указанием в каждом случае инфинитезимальных характеристик $\{a_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$.

Нелинейное свойство переходных вероятностей (1.21), имеющее место для марковских процессов из специального класса B_1, определило возможность построения мощного аналитического аппарата для исследования ветвящихся процессов [106; с. 8–9]. В связи со структурой (1.23) возникает следующая задача: выявить нелинейное свойство переходных вероятностей для других специальных классов.

Глава 2. Приложения в формальной кинетике

Марковские процессы с взаимодействием как частные случаи марковских процессов на $\mathbb{N}^n$ определялись в большом числе работ, посвященных конкретным задачам физической кинетики, химической кинетики, динамике популяций в экологических системах, в теории массового обслуживания и др., что объясняется наглядностью фазового пространства $\mathbb{N}^n$. В настоящей и последующих главах дается обзор ряда результатов для различных схем взаимодействий.

В структуре (1.23) выбор инфинитезимальных характеристик для классов марковских процессов B_1, B_2, B_3 определен феноменологическими законами кинетики. Ветвящиеся процессы класса B_1 описывают экспоненциальный рост числа "активных" частиц на начальной стадии цепной реакции [22]; процессы класса B_3 соответствуют степенному росту числа "активных" частиц в реакции такого же типа [124]. В п. 2.1.2

приведены теоремы об асимптотическом поведении среднего числа частиц в процессах рождения и гибели линейного, степенного и пуассоновского типов. В § 2.2 даны модели химических реакций в виде процессов из классов B_1 и B_2. В работе [79] была установлена связь между моделью бимолекулярной химической реакции в виде марковского процесса из класса B_2 и макроскопическим описанием кинетики такой реакции – законом действующих масс. Моделями самых разнообразных реакций могут служить процессы из множества M_1.

Стохастические модели с взаимодействием частиц при дискретных состояниях, совпадающие с рассматриваемыми в статье, изучались через численный эксперимент (см., например, [94], [95], [109], где исследовались реальные физико-химические явления). В § 2.3 кратко изложены результаты статистического моделирования ветвящегося процесса со схемой взаимодействий вида “хищник–жертва”.

§ 2.1. Типы процессов рождения и гибели

Пусть переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\}$ однородного марковского процесса ξ_t, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ представимы при $t \to 0+$ в виде:

$$P_{i,i-1}(t) = \varphi_i p_0 t + o(t), \quad P_{ii}(t) = 1 - \varphi_i t + o(t), \quad P_{i,i+1}(t) = \varphi_i p_2 t + o(t), \tag{2.1}$$

где $p_0 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $p_0 + p_2 = 1$; $\varphi_0 = 0$, $\varphi_i > 0$ при $i = 1, 2, \dots$. В начальном состоянии i процесс находится случайное время τ_i, $\mathsf{P}\{\tau_i \leqslant t\} = 1 - e^{-\varphi_i t}$; затем происходит переход в состояние $i-1$ с вероятностью p_0 или в состояние $i+1$ с вероятностью p_2; далее аналогичная эволюция процесса, причем состояние 0 поглощающее. Для такого процесса “вложенная цепь Маркова” является случайным блужданием на $\mathbb{N}$ с поглощающей граничной точкой 0.

Процесс рождения и гибели ξ_t представляет собой процесс из множества M_1 с комплексом взаимодействия $\varepsilon = 1$. Для процессов из M_1 только в случае одного комплекса взаимодействия [48] можно записать первую и вторую системы уравнений для переходных вероятностей в компактном виде, используя производящие функции. Далее применяются оператор обобщенного дифференцирования D_z и собственная функция этого оператора $e(z)$ [29]:

$$D_z\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j z^{j-1}; \qquad e(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \cdots \varphi_i}\,. \tag{2.2}$$

Введем следующие производящие функции:

$$G_j(t;z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \cdots \varphi_i} P_{ij}(t), \ j \in \mathbb{N}; \quad F_i(t;s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \ i \in \mathbb{N}; \quad |s| < 1.$$

Утверждение 2.1. *Первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса рождения и гибели ξ_t записываются в виде*:

$$\frac{\partial G_j(t;z)}{\partial t} = z(p_2 D_z^2 + p_0 - D_z) G_j(t;z), \quad G_j(0;z) = \frac{z^j}{\varphi_1 \cdots \varphi_j}\,; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial F_i(t,s)}{\partial t} = (p_2 s^2 + p_0 - s) D_s(F_i(t,s)), \quad F_i(0,s) = s^i. \tag{2.4}$$

Доказательство. Первая система дифференциальных уравнений (1.2) в случае процесса ξ_t имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{0j}(t)}{dt} &= -\varphi_0 P_{0j}(t),\\
\frac{dP_{ij}(t)}{dt} &= p_0\varphi_i P_{i-1,j}(t) - \varphi_i P_{ij}(t) + p_2\varphi_i P_{i+1,j}(t), \quad i = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

с начальными условиями $P_{ii}(0) = 1$, $P_{ij}(0) = 0$ при $i \neq j$. Используя определение функции $G_j(t;z)$, получаем уравнение (2.3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_j}{\partial t} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \cdots \varphi_i} \frac{dP_{ij}(t)}{dt}\\
&= zp_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i-1}}{\varphi_1 \cdots \varphi_{i-1}} P_{i+1,j}(t)\\
&\quad - z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i-1}}{\varphi_1 \cdots \varphi_{i-1}} P_{ij}(t) + zp_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i-1}}{\varphi_1 \cdots \varphi_{i-1}} P_{i-1,j}(t)\\
&= zp_2 D_z^2(G_j) - zD_z(G_j) + zp_0 G_j = z(p_2 D_z^2 - D_z + p_0) G_j.
\end{aligned}$$

Уравнение (2.4) является частным случаем уравнения (1.11). Утверждение 2.1 доказано.

Введем двойную производящую функцию

$$\mathscr{F}(t;z;s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \cdots \varphi_i} F_i(t;s) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \cdots \varphi_i} P_{ij}(t) s^j = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(t;z) s^j. \qquad (2.5)$$

Следствие 2.2. *Первая и вторая системы уравнений для процесса ξ_t записываются в виде*:

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = z(p_2 D_z^2 + p_0 - D_z)\mathscr{F}, \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = (p_2 s^2 + p_0 - s) D_s(\mathscr{F}), \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e(zs). \qquad (2.7)$$

В зависимости от функции $\varphi_i = \varphi(i)$ определяют типы марковских процессов [104]. Для процесса рождения и гибели *пуассоновского* типа полагают $\varphi_0 = 0$, $\varphi_i = \lambda$, $i = 1, 2, \ldots$ $(\lambda > 0)$, тогда $D_z(f) = \lambda(f(z) - f(0))/z$ и $e(z) = \lambda/(\lambda - z)$. Для процесса *линейного* типа полагают $\varphi_i = i\lambda + \lambda_1$; процесс принадлежит классу B_1. Если $\varphi_i = i\lambda$, то $D_z = \lambda\,(d/dz)$ и $e(z) = e^z$. Для процесса *квадратичного* типа [38] полагают $\varphi_i = i^2\lambda + i\lambda_1 + \lambda_2$. Если $\varphi_i = i(i-1)\lambda$, то $D_z = \lambda z\,(d^2/dz^2)$ и процесс принадлежит классу B_2. Для процесса *полиномиального* типа [82] полагают $\varphi_i = i^k\lambda + i^{k-1}\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$; в частности, исследуются процессы *кубического* и *биквадратичного* типов [81]. Для процесса *степенного* типа $\varphi_i = i^\rho\lambda$, $0 < \rho < 1$.

Уравнения Колмогорова для рассматриваемых процессов рождения и гибели имеют единственное решение при одном из следующих условий [30; гл. 7, §4]: либо $p_0 \geqslant p_2$; либо $p_0 < p_2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^{-1} = \infty$.

2.1.1. Точные решения уравнений Колмогорова. Число случаев, для которых удается найти явное решение первой и второй систем дифференциальных уравнений для марковских процессов со счетным множеством состояний, невелико; известные решения относятся к определенным выше процессам рождения и гибели и некоторым их модификациям.

Далее используется обозначение $\delta_i^i = 1$, $\delta_j^i = 0$ при $i \neq j$.

Процесс простой гибели. Полагая в определении (2.1) $p_0 = 1$, получаем процесс простой гибели; второе уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = (1-s)D_s(F_i(t;s)), \qquad F_i(0;s) = s^i.$$

Для процесса гибели выражения для переходных вероятностей, если среди чисел φ_i нет равных, следующие: $P_{0j}(t) = \delta_j^0$, $j \in \mathbb{N}$; $P_{ij}(t) = 0$ при $j > i \geqslant 1$; при $j \leqslant i$

$$P_{ij}(t) = \varphi_{j+1}\cdots\varphi_i \sum_{n=j}^{i} \frac{e^{-\varphi_n t}}{(\varphi_i - \varphi_n)\cdots(\varphi_{n+1} - \varphi_n)(\varphi_{n-1} - \varphi_n)\cdots(\varphi_j - \varphi_n)}. \quad (2.8)$$

Процесс чистого рождения. Полагая в определении (2.1) $p_2 = 1$, получаем для процесса рождения второе уравнение

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = (s^2 - s)D_s(F_i(t;s)), \qquad F_i(0;s) = s^i.$$

Выражения для переходных вероятностей, если среди чисел φ_i нет равных, имеют вид [30]: $P_{0j}(t) = \delta_j^0$, $j \in \mathbb{N}$; $P_{ij}(t) = 0$ при $j < i$; при $j \geqslant i \geqslant 1$

$$P_{ij}(t) = \varphi_i\cdots\varphi_{j-1} \sum_{n=i}^{j} \frac{e^{-\varphi_n t}}{(\varphi_i - \varphi_n)\cdots(\varphi_{n-1} - \varphi_n)(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\cdots(\varphi_j - \varphi_n)}. \quad (2.9)$$

Процесс рождения и гибели пуассоновского типа. Второе уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F_i(t,s)}{\partial t} = \lambda(p_2 s^2 + p_0 - s)\frac{F_i(t;s) - F_i(t;0)}{s}, \qquad F_i(0,s) = s^i.$$

Решение этого уравнения приводит к формулам для переходных вероятностей ($0 < p_0 < 1$) [27], [93]: $P_{0j}(t) = \delta_j^0$, $j \in \mathbb{N}$;

$$\begin{aligned} P_{i0}(t) &= i\int_0^t e^{-\lambda x}\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{i/2} I_i(2\sqrt{p_0 p_2}\,\lambda x)\,dx, \quad i = 1,2,\ldots; \\ P_{ij}(t) &= e^{-\lambda t}\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{(i-j)/2}\big(I_{i-j}(2\sqrt{p_0p_2}\,\lambda t) - I_{i+j}(2\sqrt{p_0p_2}\,\lambda t)\big), \quad i,j \neq 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $I_i(t)$ – модифицированные функции Бесселя.

Процесс рождения и гибели линейного типа. Пусть в уравнении (2.4) $D_s = \lambda\,(d/ds)$. Решение уравнения в частных производных первого порядка имеет вид [71], [106] $(p_0 \neq p_2)$:

$$F_i(t;s) = \left(\frac{p_0(1-e^{(p_0-p_2)\lambda t}) - s(p_0 - p_2 e^{(p_0-p_2)\lambda t})}{p_2 - p_0 e^{(p_0-p_2)\lambda t} - s p_2 (1-e^{(p_0-p_2)\lambda t})}\right)^i, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Явное решение уравнения Колмогорова в случае $p_0 = p_2$, а также для других процессов рождения и гибели линейного типа приведены в [106]. Процессы линейного типа рассматривались в [75], [37] и др.

2.1.2. Вероятностные модели цепных реакций. В атомной физике начальную стадию ядерных цепных реакций описывают количеством $x(t)$ "активного" вещества в момент времени t, $t \in [0,\infty)$, [106]; подробное описание физических процессов такого вида можно найти в [22], [33], [119], [21]. Количество вещества $x(t)$ может расти по экспоненциальному, степенному или линейному закону. При описании роста "активного" вещества в цепной реакции применяется уравнение формальной кинетики [23]

$$\dot{x} = \lambda x^\rho, \qquad x(0) = x_0, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \tag{2.12}$$

где коэффициент $\lambda > 0$ называется константой скорости реакции. Если в уравнении (2.12) $\rho = 1$, то $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$. При $0 < \rho < 1$ решение имеет вид

$$x(t) = \left[(1-\rho)\left(\frac{x_0^{1-\rho}}{1-\rho} + \lambda t\right)\right]^{1/(1-\rho)}; \tag{2.13}$$

следовательно, $x(t) \sim C_0(\lambda t)^{1/(1-\rho)}$ при $t \to \infty$, где $C_0 > 0$. Если в уравнении (2.12) $\rho = 0$, то $x(t) = x_0 + \lambda t$.

Детерминированной модели (2.12) соответствует вероятностная модель цепной реакции в виде марковского процесса рождения и гибели ξ_t: процесс из множества M_1 определяется набором $\varepsilon = 1$, $\{p_0, p_2 \geqslant 0,\ p_0 + p_2 = 1\}$, $\{\varphi_0 = 0,\ \varphi_i > 0,\ i = 1,2,\ldots\}$. При интерпретации события $\{\xi_t = i\}$ как наличия i частиц типа T имеем схему $T \to kT$, $k = 0,2$, когда либо одна частица "активного" типа T с вероятностью p_0 исчезает, либо с вероятностью p_2 появляются две новые частицы типа T. Положим $h(s) = p_0 + p_2 s^2$. Вероятностную модель характеризует среднее число частиц $A_i(t) = \mathsf{E}(\xi_t \mid \xi_0 = i)$ в момент времени t.

Модель цепной реакции экспоненциального роста. Для процесса рождения и гибели линейного типа, в котором $\varphi_i = \lambda i$, $i \in \mathbb{N}$ $(\lambda > 0)$, имеем второе уравнение для производящей функции переходных вероятностей

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \lambda(h(s) - s)\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial s}, \qquad F_i(0,s) = s^i. \tag{2.14}$$

Для математического ожидания числа частиц $A_i(t) = (\partial F_i(t;s)/\partial s)|_{s=1}$ из (2.14) дифференцированием по s получаем уравнение

$$\frac{dA_i}{dt} = aA_i, \qquad A_i(0) = i$$

(где $a = \lambda(h'(1) - 1)$), совпадающее с уравнением (2.12) при $\rho = 1$.

Теорема 2.3 [106], [33]. *Для процесса рождения и гибели линейного типа*

$$A_i(t) = ie^{at}. \tag{2.15}$$

Число a называется *параметром критичности.* Если $a > 0$, то среднее число "активных" частиц растет по экспоненциальному закону. В теории ветвящихся процессов рассматривается общая схема $T \to kT$, когда из одной частицы с распределением вероятностей $\{p_k\}$ появляется k новых частиц. Тогда в уравнении (2.14) $h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ и формула (2.15) также имеет место. В таблице приведены вероятности p_k возникновения k вторичных нейтронов при делении ядер урана ^{235}U тепловыми нейтронами [22].

k	0	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0.0333	0.1745	0.3349	0.3028	0.1231	0.0281	0.0032	0.0001

Модель цепной реакции степенного роста. Вероятностной моделью цепной реакции, соответствующей закону (2.13), является процесс рождения и гибели, принадлежащий классу B_3. Пусть $U(x)$ – функция распределения неотрицательной случайной величины и $U(x)$ – функция распределения устойчивого закона с параметром ρ, $0 < \rho < 1$. Преобразование Лапласа распределения $U(x)$ [26; т. 2, гл. 13, § 6]:

$$\omega(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}\, U\{dx\} = e^{-\psi(p)}, \qquad p \geqslant 0,$$

где $\psi(p) = \lambda p^{\rho}$ и $\lambda > 0$. Следуя определению § 1.6, получаем $\varphi_i = \lambda i^{\rho}$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.4 [125]. *Пусть для процесса рождения и гибели степенного типа параметр критичности $a > 0$ и $1/2 < \rho < 1$. Тогда при $t \to \infty$*

$$A_i(t) \sim C_i(at)^{1/(1-\rho)}, \qquad C_i > 0.$$

Аналогичные результаты получены в работе [14].

Модель цепной реакции линейного роста. Следующее утверждение для случая, когда $\varphi_0 = 0$, $\varphi_i = \lambda$, $i = 1, 2, \ldots$, получено в [93], исходя из явных выражений (2.10) для переходных вероятностей.

Теорема 2.5 [93]. *Пусть для процесса рождения и гибели пуассоновского типа параметр критичности $a > 0$. Тогда при $t \to \infty$*

$$A_i(t) \sim C_i at, \qquad C_i > 0.$$

Рассмотренные законы для роста среднего числа "активных" частиц в цепных реакциях изображены на рис. 1.

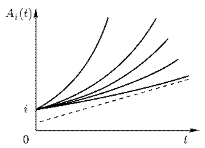

Рис. 1. Средние для схем вида $T \to kT$

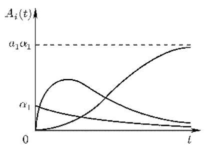

Рис. 2. Средние для схем вида $T_1 \to T_2 \to T_3$

§ 2.2. Марковские модели химических реакций

Общую схему химической реакции, в которой участвуют реагенты $T_1, \dots, T_n$, записывают в виде (1.9) при фиксированных векторах $\gamma^1, \dots, \gamma^l$ [23]. Отдельная строка в схеме (1.9) соответствует элементарному акту реакции. Кинетику химической реакции описывают количеством $x_i(t)$ реагента T_i в момент времени t, $t \in [0, \infty)$; $i = 1, \dots, n$. Функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \quad \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0$. Вид функций $f_1, \dots, f_n$ определяется исходя из законов формальной химической кинетики [23].

Вероятностные модели химических реакций в виде марковских процессов на фазовом пространстве $\mathbb{N}^n$ были введены в [79]. Разнообразные примеры таких марковских процессов даны в [10; гл. 8, “Приложения в химии”] и в работе [89]. Ветвящийся процесс со схемой (1.9) и фиксированными векторами $\gamma^1, \dots, \gamma^l$ определен в [92] и назван “обобщенным процессом рождения и гибели”. Подробное описание физических требований, при которых допустимо представление химической реакции как марковского процесса, можно найти в [121; §§ 7.1, 7.2]. Далее приведены основные уравнения химической кинетики и соответствующие им марковские процессы на $\mathbb{N}^n$.

Отметим, что схемой взаимодействий (1.9) может быть учтено как образование конечного продукта в химической реакции (процессы с частицами финальных типов), так и поступление реагентов в систему извне (процессы с иммиграцией частиц).

2.2.1. Мономолекулярные реакции. Химические реакции, в элементарном акте которых участвует одна частица, называются мономолекулярными; схема (1.9) получает вид

$$\begin{cases} T_1 \to \gamma_1^1 T_1 + \gamma_2^1 T_2 + \dots + \gamma_n^1 T_n, \\ \quad \dots \\ T_l \to \gamma_1^l T_1 + \gamma_2^l T_2 + \dots + \gamma_n^l T_n. \end{cases} \tag{2.16}$$

Моделями мономолекулярных химических реакций служат марковские процессы из класса B_1 [105]. В [106; гл. 4, § 6] дана классификация типов частиц ветвящегося процесса, являющаяся классификацией схем вида (2.16). Там же, гл. 4, § 4, изложены общие методы вычисления среднего числа частиц типа T_i, $i = 1, \dots, n$; в гл. 4, § 7, исследованы асимптотические свойства средних при $t \to \infty$ в неразложимых ветвящихся процессах и указано на разнообразие асимптотического поведения средних в разложимых процессах. Для химических реакций схемы вида (2.16) соответствуют, как правило, разложимым процессам; к таким процессам относятся следующие примеры.

Реакция $T_1 \to T_2$. Реакция описывается количеством $x_1(t)$ реагента T_1 и количеством $x_2(t)$ реагента T_2. Полагают справедливым закон кинетики [23]

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1, \qquad \dot{x}_2 = \lambda x_1, \tag{2.17}$$

где $\lambda > 0$ – константа скорости реакции.

Детерминированной модели (2.17) соответствует процесс превращения частиц из класса B_1 с двумя типами частиц T_1, T_2 и одним комплексом взаимодействия [10], [89]: марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $\mathbb{N}^2$, определяемый набором $\varepsilon = (1, 0)$, $\{p_{(0,1)} = 1\}$, $\{\varphi_\alpha = \lambda\alpha_1,\ \alpha \in \mathbb{N}^2,\ \lambda > 0\}$. Второе уравнение Колмогорова для производящей функции переходных вероятностей $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$ имеет вид

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \lambda(s_2 - s_1)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_1}\,, \tag{2.18}$$

начальное условие возьмем $F_\alpha(0; s) = s_1^{\alpha_1}$.

Для среднего числа частиц $A_1(t) = \mathsf{E}\xi_1(t)$, $A_2(t) = \mathsf{E}\xi_2(t)$ дифференцированием (2.18) по s_1 или s_2 получаем систему уравнений

$$\frac{dA_1}{dt} = -\lambda A_1, \qquad \frac{dA_2}{dt} = \lambda A_1$$

с начальными условиями $A_1(0) = \alpha_1$, $A_2(0) = 0$. Отсюда $A_1(t) = \alpha_1 e^{-\lambda t}$, $A_2(t) = \alpha_1(1 - e^{-\lambda t})$. Решение уравнения (2.18) имеет вид

$$F_{(\alpha_1,0)}(t; s_1, s_2) = \big(s_1 e^{-\lambda t} + s_2(1 - e^{-\lambda t})\big)^{\alpha_1}. \tag{2.19}$$

Для дисперсии числа частиц $D_1(t) = \mathsf{D}\xi_1(t)$, $D_2(t) = \mathsf{D}\xi_2(t)$ из (2.19) по формуле (1.5) получаем $D_1(t) = D_2(t) = \alpha_1 e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$.

Производящая функция (2.19) соответствует биномиальному распределению на состояниях $\{(\alpha_1, 0), (\alpha_1 - 1, 1), \dots, (0, \alpha_1)\}$; теорема Муавра–Лапласа об аппроксимации биномиального распределения нормальным распределением получает следующий вид.

Теорема 2.6. *Пусть $\xi_i(t)$ – число частиц типа T_i в момент времени t для ветвящегося процесса со схемой $T_1 \to T_2$ и в момент времени $t = 0$ имелось α_1 частиц типа T_1. Тогда при фиксированном $t > 0$*

$$\lim_{\alpha_1 \to \infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_i(t) - A_i(t)}{\sqrt{D_i(t)}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du, \qquad i = 1, 2. \tag{2.20}$$

При наблюдении за химической реакцией получают набор экспериментальных данных, по результатам статистической обработки которых находят приближения для кинетических кривых $x_1(t)$, $x_2(t)$. При этом, как правило, предполагается, что экспериментальные точки отклонены от кинетической кривой согласно нормальному закону. Предельная теорема 2.6 показывает, что при условиях рассматриваемой вероятностной модели отклонение “экспериментальных” значений $\xi_i(t)$ от значений $A_i(t)$ распределено по нормальному закону.

Последовательная реакция $T_1 \to T_2 \to T_3$. В [97] рассмотрен разложимый ветвящийся процесс с тремя типами частиц T_1, T_2, T_3 и схемой превращений частиц

$$\begin{cases} T_1 \to \gamma_1^1 T_1 + \gamma_2^1 T_2 + \gamma_3^1 T_3, \\ T_2 \to \gamma_2^2 T_2 + \gamma_3^2 T_3. \end{cases} \tag{2.21}$$

Производящая функция переходных вероятностей $F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t;s_1,s_2,s_3)$ удовлетворяет второму уравнению ($\lambda > 0$, $\mu > 0$)

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \lambda(h_1(s_1,s_2,s_3)-s_1)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_1} + \mu(h_2(s_2,s_3)-s_2)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_2}, \qquad (2.22)$$

начальное условие возьмем $F_\alpha(0;s) = s_1^{\alpha_1}$. Здесь $h_1(s_1,s_2,s_3)$, $h_2(s_2,s_3)$ – вероятностные производящие функции. Положим

$$a_j^i = \left.\frac{\partial h_i}{\partial s_j}\right|_{s=1} - \delta_j^i, \quad b_{jk}^i = \left.\frac{\partial^2 h_i}{\partial s_j \partial s_k}\right|_{s=1}, \qquad i,j,k = 1,2,3.$$

Методами [106; гл. 4] в [97] из уравнения (2.22) получены явные выражения для среднего числа $A_i(t)$ частиц типа T_i, $i = 1,2,3$. На рис. 2 изображен вид $A_i(t)$ для случая $a_1^1 < 0$, $a_2^1 > 0$, $a_2^2 < 0$, $a_3^2 > 0$. Такой вид кинетических кривых характерен для мономолекулярной химической реакции $T_1 \to T_2 \to T_3$ ([23] см. рис. 56).

Теорема 2.7 [97]. *Пусть для ветвящегося процесса со схемой* (2.21) $a_1^1 < 0$, $a_2^1 > 0$, $a_2^2 < 0$, $a_3^2 > 0$; $b_{11}^1 > 0$ *или* $b_{22}^2 > 0$; $h_2(0,1) > 0$. *Пусть в момент времени* $t = 0$ *имелось* α_1 *частиц типа* T_1 *и* η_{α_1} – *число финальных частиц типа* T_3, *порожденных первоначальными частицами. Тогда*

$$\lim_{\alpha_1\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\eta_{\alpha_1} - a_1\alpha_1}{\sigma_1\sqrt{\alpha_1}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du, \qquad (2.23)$$

где

$$a_1 = \frac{a_2^1 a_3^2 - a_3^1 a_2^2}{a_1^1 a_2^2}, \quad \sigma_1^2 = b_1 + a_1 - (a_1)^2,$$
$$b_1 = -\frac{a_2^1 b_2 + b_{11}^1(a_1)^2 + 2b_{12}^1 a_1 a_2 + b_{22}^1(a_2)^2 + 2b_{13}^1 a_1 + 2b_{23}^1 a_2 + b_{33}^1}{a_1^1},$$
$$a_2 = -\frac{a_3^2}{a_2^2}, \quad b_2 = -\frac{b_{22}^2(a_2)^2 + 2b_{23}^2 a_2 + b_{33}^2}{a_2^2}.$$

Теорема 2.7 обобщает теорему 1 из [106; гл. 5, § 5], где рассмотрен ветвящийся процесс со схемой $T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$. Процесс со схемой общего вида $T_1 \to T_2 \to \dots \to T_n$ исследован в [98]; о других разложимых ветвящихся процессах см. обзор [122].

Утверждения вида (2.20) и (2.23) для других схем (2.16) следуют из свойства ветвления (1.21), которое означает при фиксированном $t > 0$, что число частиц типа T_i есть сумма независимых случайных величин; для вывода предельных теорем к соотношению (1.21) применяется метод характеристических функций. В [106; гл. 5, § 5] установлено, что кроме нормального распределения имеются другие предельные распределения при большом начальном числе частиц.

2.2.2. Бимолекулярные реакции. Химические реакции, в элементарном акте которых участвуют две частицы, называются бимолекулярными. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ – количества реагентов T_1, T_2, T_3 в момент времени t для бимолекулярной реакции со схемой $T_1 + T_2 \to T_3$. В формальной кинетике полагают справедливым закон действующих масс [23]

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -\lambda x_1 x_2, \quad \dot{x}_3 = \lambda x_1 x_2. \tag{2.24}$$

В качестве вероятностной модели реакции рассматривают процесс из класса B_2 с тремя типами частиц T_1, T_2, T_3 и одним комплексом взаимодействия [10], [89]: марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $\mathbb{N}^3$, определяемый набором $\varepsilon = (1,1,0)$, $\{p_{(0,0,1)} = 1\}$, $\{\varphi_\alpha = \lambda\alpha_1\alpha_2,\ \alpha \in \mathbb{N}^3,\ \lambda > 0\}$. Второе уравнение для производящей функции переходных вероятностей $F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t; s_1, s_2, s_3)$ имеет вид

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \lambda(s_3 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 F_\alpha(t;s)}{\partial s_1 \partial s_2}, \qquad F_\alpha(0;s) = s^\alpha.$$

Заметим, что $\xi(t)$ есть процесс гибели на состояниях $\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 + 1), \ldots, (\alpha_1 - \alpha_2, 0, \alpha_3 + \alpha_2)\}$ с поглощающим состоянием $(\alpha_1 - \alpha_2, 0, \alpha_3 + \alpha_2)$ (при предположении $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$). Явные выражения для переходных вероятностей процесса $\xi(t)$ даются формулой (2.8) при соответствующей функции φ.

В рассматриваемой вероятностной модели для среднего числа частиц типа T_i, $A_i(t) = (\partial F_\alpha(t;s)/\partial s_i)|_{s=1}$, $i = 1,2,3$, уравнения (2.24) не выполнены. Уравнения (2.24) соблюдаются как приближенные для средних $A_i(t)$ при большом начальном числе частиц; полагают $\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2, n\alpha_3)$ и $n \to \infty$ (предельный переход соответствует принятому в статистической физике термодинамическому предельному переходу [102]). Условия для такого детерминированного приближения процесса $\xi(t)$ рассмотрены в [10; § 8.2, п. B], исходя из явных выражений для переходных вероятностей.

С точки зрения указанного предельного перехода в [79] рассмотрен марковский процесс на $\mathbb{N}^n$ из класса B_2 со схемой взаимодействий $T_i + T_j \to T_k + T_l$, $i, j, k, l = 1, \ldots, n$. Уравнения формальной кинетики для других бимолекулярных схем и соответствующие им марковские процессы из класса B_2 даны в § 2.3 и пп. 3.3.2, 4.2.1 (см. также [32], [57]).

Класс B_4. При исследовании химических реакций всегда ограничиваются рассмотрением актов взаимодействий, в которых участвует не более двух частиц, т.е. в схеме (1.9) полагают $|\varepsilon^i| \leqslant 2$, $i = 1, \ldots, l$. В формальной кинетике рассматривают обобщение закона (2.24); для бимолекулярной реакции $T_1 + T_2 \to T_3$ полагают [23] (ср. уравнение (2.12))

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2}; \quad \dot{x}_2 = -\lambda x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2}; \quad \dot{x}_3 = \lambda x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2}, \qquad \rho_1 > 0, \quad \rho_2 > 0.$$

Можно определить класс марковских процессов B_4 на множестве состояний $\mathbb{N}^n$ (по аналогии с определением класса B_3), соответствующий уравнениям такого вида. Структура (1.23) дополнится соотношениями $M_1 \supset B_4 \supset B_2$, $M_1 \supset B_4 \supset B_3$.

§ 2.3. Стохастический процесс "хищник–жертва"

Динамику экологической системы "хищник–жертва" описывают количеством $x_1(t)$ "хищников" и количеством $x_2(t)$ "жертв" в момент времени t. Используется система нелинейных дифференциальных уравнений [123]

$$\dot{x}_1 = -\mu x_1 + \lambda x_1 x_2, \qquad \dot{x}_2 = \rho x_2 - \lambda x_1 x_2, \tag{2.25}$$

где $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\rho > 0$ – некоторые константы.

Детерминированной модели соответствует марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0; \infty)$, на множестве состояний $\mathbb{N}^2$ – ветвящийся процесс с двумя типами частиц T_1, T_2 и схемой взаимодействий [20]:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 \to 2T_1, \\ T_1 \to 0, \\ T_2 \to 2T_2. \end{cases} \tag{2.26}$$

Второе уравнение Колмогорова для производящей функции переходных вероятностей $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$ имеет вид

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \lambda(s_1^2 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 F_\alpha(t;s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \mu(1 - s_1)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_1} + \rho(s_2^2 - s_2)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_2} \tag{2.27}$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s^\alpha$. Событие $\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2)\}$ интерпретируется как наличие совокупности из β_1 частиц типа T_1 и β_2 частиц типа T_2. Частицы типа T_1 – "хищники", частицы типа T_2 – "жертвы", при схеме (2.26) полагается: взаимодействие "хищника" и "жертвы" приводит к увеличению числа "хищников"; частицы-"хищники" могут умирать; частицы-"жертвы" производят себе подобных. Такое описание системы "хищник–жертва" соотносится при большом начальном числе частиц с системой дифференциальных уравнений (2.25); приближение системы (2.25) получается из уравнения (2.27) дифференцированием по s_1 или s_2 и переходе к среднему числу частиц $A_i(t) = (\partial F_\alpha(t;s)/\partial s_i)|_{s=1}$, $i = 1, 2$.

Для статистического моделирования на ЭВМ марковского процесса $\xi(t)$ в работе [116] использовано эквивалентное его описание при помощи случайного времени $\tau_{(\beta_1,\beta_2)}$ нахождения процесса в состоянии (β_1, β_2) в соответствии с п. 1.3.1. Статистические эксперименты дали возможность сделать предположение об области K значений параметров μ, ρ (без ограничения общности $\lambda = 1$), когда реализации процесса $\xi(t)$ устойчиво имеют колебательный вид (что характерно для детерминированной системы "хищник–жертва" [123]): $K = \{\mu > 0, \rho > 0 : c_1 < \mu/\rho < c_2\}$, где c_1, c_2 – некоторые константы. При значении параметров вне области K процесс быстро либо попадает в одно из состояний $(\gamma_1, 0)$, $\gamma_1 = 1, 2, \ldots$, и вырождается в поглощающем состоянии $(0, 0)$, либо попадает в одно из состояний $(0, \gamma_2)$, $\gamma_2 = 1, 2, \ldots$, и уходит на бесконечность. На рис. 3 приведен пример реализации процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, 2.159834]$, при начальных условиях $\xi_1(0) = 12$, $\xi_2(0) = 20$ и значениях параметров $\lambda = 1$, $\mu = 31$, $\rho = 27$ [116].

Обзор литературы по моделированию на ЭВМ системы "хищник–жертва" содержит книга [72], см. также [95].

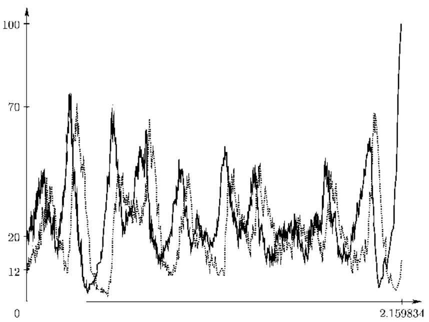

Рис. 3. Реализация марковского процесса “хищник–жертва”

Глава 3. Стационарные и финальные вероятности

Пусть $P_{\alpha\beta}(t)$ – переходные вероятности однородного марковского процесса на множестве $\mathbb{N}^n$ с непрерывным временем t, $t \in [0, \infty)$. В общей теории процессов со счетным множеством состояний показано [18] при выполнении условий п. 1.1.1, что существуют пределы

$$q_{\alpha\beta} = \lim_{t\to\infty} P_{\alpha\beta}(t), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n; \tag{3.1}$$

$q_{\alpha\beta}$ называют предельными вероятностями. Предельные вероятности не обязательно составляют распределение вероятностей, $\sum_\beta q_{\alpha\beta} \leqslant 1$.

Предельное поведение марковских процессов имеет разнообразный характер, определяемый классификацией состояний процесса [18]. Можно выделить основные случаи – когда процесс попадает в поглощающее состояние или уходит на бесконечность и когда процесс приходит к стационарному положению. Для нахождения финальных вероятностей (вероятностей вырождения процесса в поглощающих состояниях) решается стационарная первая система дифференциальных уравнений Колмогорова; для нахождения предельного стационарного распределения вероятностей решается стационарная вторая система дифференциальных уравнений Колмогорова. В § 3.1 получены первое и второе стационарные уравнения для производящих функций предельных вероятностей марковских процессов класса B_2. В § 3.2 показано, что для некоторых процессов из классов B_1, B_2 стационарное распределение при $t \to \infty$ совпадает с принятыми в равновесной статистической физике каноническими распределениями. В § 3.3 изложен предложенный автором метод нахождения финальных вероятностей для процессов с взаимодействием путем решения уравнения в частных производных для экспоненциальной (двойной) производящей функции. Приведены результаты об интегральных представлениях для финальных вероятностей при схемах с взаимодействием частиц разных типов. Точные решения граничной задачи Дарбу–Пикара (задачи Гурса) для уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа получены методом Римана.

§ 3.1. Уравнения для предельных вероятностей

Пусть марковский процесс из класса B_2 задан набором $\varepsilon^1, \{p^1_\gamma\}, \ldots, \varepsilon^l, \{p^l_\gamma\}$. Вводим многомерные производящие функции вероятностей (3.1):

$$g_\beta(z) = \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} q_{\alpha\beta}, \quad f_\alpha(s) = \sum_\beta q_{\alpha\beta} s^\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Функция $g_\beta(z)$ является аналитической функцией переменных $z_1, \ldots, z_n$, функция $f_\alpha(s)$ является аналитической в области $|s_1| < 1, \ldots, |s_n| < 1$.

Теорема 3.1. *Экспоненциальная производящая функция предельных вероятностей $g_\beta(z)$ ветвящегося процесса с взаимодействием при любом $\beta \in \mathbb{N}^n$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i z^{\varepsilon^i} \left(h_i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial z^{\varepsilon^i}} \right) g_\beta(z) = 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Используем полученное в теореме 1.2 уравнение (1.14) для экспоненциальной производящей функции переходных вероятностей $G_\beta(t; z)$ для вывода стационарного уравнения (3.2). Из общей теории однородных марковских процессов со счетным множеством состояний известно [18], что при принятых в п. 1.1.1 предположениях

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = 0, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Тогда из установленной при доказательстве теоремы 1.2 равномерной по t сходимости ряда

$$\sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} \frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt}$$

следует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = 0, \qquad \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{3.3}$$

С другой стороны, так как ряд

$$\sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta}(t)$$

сходится равномерно в области $t \in [0, \infty)$, то

$$g_\beta(z) = \lim_{t\to\infty} G_\beta(t; z), \qquad \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{3.4}$$

Из уравнения (1.14) и соотношений (3.3) и (3.4) следует уравнение (3.2). Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Производящая функция предельных вероятностей $f_\alpha(s)$ ветвящегося процесса с взаимодействием при любом $\alpha \in \mathbb{N}^n$ удовлетворяет при $|s| \leqslant 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \big(h_i(s) - s^{\varepsilon^i}\big) \frac{\partial^{\varepsilon^i} f_\alpha(s)}{\partial s^{\varepsilon^i}} = 0. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2 является следствием теоремы 1.3.

§ 3.2. Стационарное распределение для системы взаимодействующих частиц при дискретных состояниях

Рассматривается стохастическая система из частиц n различных типов $T_1, \dots, T_n$, взаимодействующих друг с другом комплексами. Состояние системы характеризуется n-мерным вектором $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, что означает наличие группы частиц S_α из α_1 частиц типа T_1, ..., α_n частиц типа T_n; $P_{\alpha\beta}(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, – вероятности того, что за промежуток времени $[0,t]$ начальная группа частиц S_α перейдет в группу частиц S_β. Следуя § 1.3, предполагаем, что случайный процесс является марковским и однородным во времени; плотности переходных вероятностей $a_{\alpha\beta} = (dP_{\alpha\beta}(t)/dt)|_{t=0+}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, зададим следующим образом. Фиксируем множество векторов $A = \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^l \in \mathbb{N}^n\}$ и матрицу $P = (p^i_j)^l_{i,j=1}$, для элементов которой выполнены условия $p^i_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^l p^i_j = 1$. Предположим, что за время Δt, $\Delta t \to 0$, для любой совокупности $S_{\varepsilon^i} = \varepsilon^i_1 T_1 + \dots + \varepsilon^i_n T_n$ ее частицы взаимодействуют между собой с вероятностью $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, $\lambda_i > 0$, причем взаимодействие нескольких таких групп за время Δt может произойти лишь с вероятностью $o(\Delta t)$. В результате такого взаимодействия с вероятностью p^i_j вместо комплекса взаимодействующих частиц S_{ε^i} появляется новая совокупность частиц S_{ε^j}, причем $\sum_{i=1}^l p^i_j = 1$, $p^i_i = 0$; группа частиц $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n$ переходит в группу частиц $S_{\alpha - \varepsilon^i + \varepsilon^j} = (\alpha_1 - \varepsilon^i_1 + \varepsilon^j_1)T_1 + \dots + (\alpha_n - \varepsilon^i_n + \varepsilon^j_n)T_n$. Тогда из сделанных предположений следует

$$a_{\alpha\alpha} = -\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \alpha_1^{[\varepsilon^i_1]} \cdots \alpha_n^{[\varepsilon^i_n]}, \quad a_{\alpha\beta} = \sum_{i,j:\, \beta = \alpha - \varepsilon^i + \varepsilon^j} \lambda_i \alpha_1^{[\varepsilon^i_1]} \cdots \alpha_n^{[\varepsilon^i_n]} p^i_j \ (\alpha \neq \beta). \tag{3.6}$$

Для рассматриваемого марковского процесса из класса B_2 в схеме взаимодействий (1.9) каждый из возможных векторов $\gamma^1, \dots, \gamma^l$ принадлежит множеству комплексов взаимодействия $A = \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^l\}$. Второе уравнение Колмогорова для производящей функции переходных вероятностей (1.10) получает вид

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon^i}) \frac{\partial^{\varepsilon^i} F_\alpha(t;s)}{\partial s^{\varepsilon^i}}, \qquad F_\alpha(0;s) = s^\alpha,$$

где $h_i(s) = \sum_{j=1}^l p^i_j s^{\varepsilon^j}$, $i = 1, \dots, l$.

Состояние γ называется достижимым из состояния α, $\alpha \to \gamma$, если существует t_0, $t_0 < \infty$, такое, что $P_{\alpha\gamma}(t_0) > 0$. Пусть некоторая степень матрицы P имеет только положительные элементы (условие эргодичности [30]). Тогда $\varepsilon^i \to \varepsilon^j$ для любых

$i, j = 1, \dots, l$ и если $\alpha \to \gamma$, то и $\gamma \to \alpha$, т.е. множество $K_\alpha = \{\gamma : \alpha \to \gamma\}$ образует замкнутый класс сообщающихся состояний.

Теорема 3.3 [40]. *Пусть для матрицы P выполнено условие эргодичности и найдется набор положительных чисел $q = (q_1, \dots, q_n)$ такой, что*

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i q^{\varepsilon^i} - \lambda_j q^{\varepsilon^j} = 0, \qquad j = 1, \dots, l. \tag{3.7}$$

Тогда при любом начальном состоянии α марковского процесса в классе K_α существует предельное стационарное распределение $\{q_{\alpha\gamma},\ \gamma \in K_\alpha\}$,

$$q_{\alpha\gamma} = \lim_{t\to\infty} P_{\alpha\gamma}(t), \qquad \alpha, \gamma \in K_\alpha,$$

и производящая функция стационарных вероятностей имеет вид

$$f_\alpha(s) = \sum_{\gamma\in K_\alpha} q_{\alpha\gamma} s^\gamma = \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^\gamma}{\gamma!}\right)^{-1} \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^\gamma s^\gamma}{\gamma!}\right). \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть класс K_α конечный. В конечном замкнутом классе состояний марковского процесса с непрерывным временем всегда существует предельное распределение и оно единственно [30]; для доказательства теоремы достаточно показать, что производящая функция (3.8) удовлетворяет стационарному второму уравнению (3.5):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l} \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon^i}) \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial s^{\varepsilon^i}} \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^\gamma s^\gamma}{\gamma!}\right) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{l} p_j^i s^{\varepsilon^j} - s^{\varepsilon^i}\right) q^{\varepsilon^i} \sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^{\gamma-\varepsilon^i} s^{\gamma-\varepsilon^i}}{(\gamma-\varepsilon^i)!} \\
&\quad = \left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i s^{\varepsilon^j} q^{\varepsilon^i} - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i s^{\varepsilon^i} q^{\varepsilon^i}\right) \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^{\gamma-\varepsilon^1} s^{\gamma-\varepsilon^1}}{(\gamma-\varepsilon^1)!}\right) \\
&\quad = \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^{\gamma-\varepsilon^1} s^{\gamma-\varepsilon^1}}{(\gamma-\varepsilon^1)!}\right) \sum_{j=1}^{l} s^{\varepsilon^j} \left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i q^{\varepsilon^i} - \lambda_j q^{\varepsilon^j}\right) = 0,
\end{aligned}$$

так как по условию (3.7) второй множитель равен нулю.

В случае бесконечного класса K_α также используется стационарное уравнение (3.5) и достаточное условие существования предельного распределения в замкнутом классе состояний марковского процесса ([30; гл. 3, § 6], [12]) – наличие нетривиального абсолютно суммируемого решения стационарной второй системы уравнений Колмогорова. Теорема 3.3 доказана.

Частные случаи. Стационарное распределение (3.8) для системы взаимодействующих частиц связано с основными представлениями равновесной статистической физики. Пусть классы сообщающихся состояний образуют множества $K_E = \{\gamma \in \mathbb{N}^n :$

$\gamma_1 + \dots + \gamma_n = E\}$, $E = 0, 1, 2, \dots$, и найдется вектор q, удовлетворяющий условиям (3.7). Предельное распределение в классе K_E задается производящей функцией полиномиального распределения

$$f_E(s) = \left(\sum_{\gamma \in K_E} \frac{q^\gamma}{\gamma!}\right)^{-1} \left(\sum_{\gamma \in K_E} \frac{q^\gamma s^\gamma}{\gamma!}\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^n q_i\right)^{-E} \left(\sum_{i=1}^n q_i s_i\right)^E = (\widetilde{q}_1 s_1 + \dots + \widetilde{q}_n s_n)^E, \tag{3.9}$$

где $\widetilde{q}_i = q_i \left(\sum_{i=1}^n q_i\right)^{-1}$, $i = 1, \dots, n$. Распределение (3.9) – "микроканоническое" распределение [79], справедливое для замкнутых систем взаимодействующих частиц. Если при $t = 0$ имелось E частиц произвольных типов, то при $t \to \infty$ частицы распределяются по типам $T_1, \dots, T_n$ независимо друг от друга с распределением вероятностей $\{\widetilde{q}_1, \dots, \widetilde{q}_n\}$. Распределение (3.9) получено в [79] для бимолекулярных процессов, когда $|\varepsilon^i| = 2$, $i = 1, \dots, l$, при требованиях типа симметрии на плотности (3.6).

Пусть имеется один тип частиц T и два комплекса взаимодействия $\varepsilon^1 = 0$, $\varepsilon^2 = 1$, т.е. рассматривается схема превращений $0 \to T$, $T \to 0$. Все множество состояний $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ образует замкнутый класс, и стационарным распределением является пуассоновское распределение $\{q_{\alpha\gamma} = q^\gamma e^{-q}/\gamma!,\ \gamma \in \mathbb{N}\}$. Такой процесс рассмотрен в [92] как открытая система взаимодействующих частиц с интерпретацией пуассоновского распределения как "канонического" распределения. Другие частные случаи с двумя комплексами взаимодействия обсуждаются в [121].

Теорема 3.3 обобщает известные результаты для ветвящихся процессов с несколькими типами частиц: о предельном стационарном распределении для докритического ветвящегося процесса с иммиграцией [106; гл. 7, § 3], о предельном распределении в финальном классе ветвящегося процесса [106; гл. 4, § 7].

§ 3.3. Метод экспоненциальной производящей функции

Экспоненциальная производящая функция введена в работе [39] для вычисления вероятности вырождения ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $\varepsilon T \to kT$ ($\varepsilon = 2, 3, \dots$); вероятность вырождения для схемы $T \to kT$ рассматривалась в [106], [33] и др. В [41] метод применен для вычисления финальных вероятностей процесса со схемой $\varepsilon T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$ ($\varepsilon = 2, 3, \dots$), получены предельные теоремы для числа финальных частиц типа T_2, когда начальное число частиц типа T_1 велико; обобщена схема $T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, рассмотренная в [106; гл. 5, §§ 4, 5]. Кроме указанных далее, метод экспоненциальной производящей функции развит в работах [51], [59], [58].

3.3.1. Популяция с двумя полами. На множестве состояний $\mathbb{N}^2$ рассматривается однородный марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$. Пусть при $t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) &= 1 - \alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t), \\ P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) &= p_{\beta_1-\alpha_1+1,\beta_2-\alpha_2+1}\alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t), \end{aligned} \tag{3.10}$$

если $\alpha_1 \neq \beta_1$ или $\alpha_2 \neq \beta_2$. Здесь задано распределение вероятностей $\{p_{\gamma_1\gamma_2}, p_{11} = 0\}$. С помощью производящих функций ($|s_1| \leqslant 1, |s_2| \leqslant 1$)

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}, \quad h(s_1, s_2) = \sum_{\gamma_1,\gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1\gamma_2} s_1^{\gamma_1} s_2^{\gamma_2}$$

вторая система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса $\xi(t)$ записывается в виде

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \lambda(h(s_1, s_2) - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2}, \quad F_\alpha(0; s) = s^\alpha.$$

Процессу $\xi(t)$ из класса B_2 соответствует схема взаимодействий $T_1 + T_2 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$. Пусть процесс находится в начальном состоянии (α_1, α_2). Следуя п. 1.3.1, можно полагать, что через случайное время $\tau_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\mathsf{P}\{\tau_{(\alpha_1,\alpha_2)} \leqslant t\} = 1 - e^{-\alpha_1\alpha_2\lambda t}$, происходит взаимодействие частицы типа T_1 с частицей типа T_2. Эти две частицы превращаются в группу из γ_1 частиц типа T_1 и γ_2 частиц типа T_2 с распределением вероятностей $\{p_{\gamma_1\gamma_2}\}$; процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 + \gamma_1 - 1, \alpha_2 + \gamma_2 - 1)$. Далее аналогичная эволюция случайного процесса. Ветвящийся процесс $\xi(t)$ представляет собой модель популяции с особями мужского рода и особями женского рода [118], [58]. Основные предположения в модели: любая пара особей $T_1 + T_2$ в популяции порождает потомство независимо от всех других; частота актов порождения новых особей пропорциональна числу особей типа T_1 и числу особей типа T_2.

Для процесса $\xi(t)$ состояния $(\gamma_1, 0)$, $(0, \gamma_2)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$, являются поглощающими (остались частицы одного типа, взаимодействия невозможны). Из соображений симметрии достаточно рассматривать финальные вероятности

$$q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \lim_{t\to\infty} P_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t), \qquad \gamma_2 \in \mathbb{N}.$$

Экспоненциальная производящая функция

$$g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \tag{3.11}$$

удовлетворяет стационарному первому уравнению Колмогорова (уравнение (3.2))

$$\left[h\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}\right] g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) = 0. \tag{3.12}$$

Из очевидных равенств для финальных вероятностей: $q_{(0,\gamma_2)}^{(0,\gamma_2)} = 1$; $q_{(0,\gamma_2)}^{(0,\alpha_2)} = 0$, если $\alpha_2 \neq \gamma_2$; $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,0)} = 0$, если $\alpha_1 = 0, 1, \ldots,$ – следуют граничные условия

$$g_{(0,\gamma_2)}(0, z_2) = \frac{z_2^{\gamma_2}}{\gamma_2!}, \qquad g_{(0,\gamma_2)}(z_1, 0) = 0. \tag{3.13}$$

Для уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами (3.12) характеристическим является уравнение

$$h(s_1, s_2) - s_1 s_2 = 0 \tag{3.14}$$

(ср. [106; гл. 2, § 1, уравнение (9)] и [33; гл. 5, § 4, уравнение (2)] для схемы $T \to kT$).

Задача о нахождении вероятности $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ совпадает с задачей о вероятности остановки на границе однородного случайного блуждания в четверти плоскости $\mathbb{N}^2$ [85] (см. также [90]), при рассмотрении которой основную роль играет многозначная функция комплексного аргумента, определяемая уравнением (3.14) [84], [25]. Разработанная в [84] аналитическая техника выявила эллиптические функции при решении задач о многомерных блужданиях с границами. Методами работы [84] в [31] найдено интегральное представление для $q_{(0,\gamma_2)}^{(1,\alpha_2)}$ в симметричном случае $h(s_1, s_2) = p_{01}s_1^2 s_2 + p_{10}s_1 s_2^2 + p_{10}s_1 + p_{01}s_2$, содержащее функции $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{sn} u$. В [85] приведены ссылки на работы по граничной задаче вида (3.12), (3.13).

Интегральное представление для финальных вероятностей в случае $h(s_1, s_2) = p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{00}$. Уравнение (3.12) получает вид

$$p_{20}\,\frac{\partial^2 g_{(0,\gamma_2)}}{\partial z_1^2} + p_{02}\,\frac{\partial^2 g_{(0,\gamma_2)}}{\partial z_2^2} + p_{00}\, g_{(0,\gamma_2)} - \frac{\partial^2 g_{(0,\gamma_2)}}{\partial z_1 \partial z_2} = 0 \tag{3.15}$$

с граничными условиями (3.13). Приведение уравнения гиперболического типа (3.15) к каноническому виду дает телеграфное уравнение. Для уравнения (3.15) имеем задачу Дарбу–Пикара: заданы условия (3.13) на двух монотонных кривых, выходящих из точки $(0,0)$ и расположенных в характеристическом угле с вершиной в той же точке $(0,0)$. Исходя из формулы Римана для телеграфного уравнения [11], [113], в [61] построено решение граничной задачи (3.15), (3.13) в виде ряда по функциям Бесселя целого порядка. После некоторых преобразований решение суммировано к интегральному представлению, содержащему эллиптическую функцию. Приведем основной результат работ [51], [61].

Пусть ω и ω' – положительные числа. Положим $h = e^{-\pi\omega'/\omega}$, $z = e^{\pi i u/(2\omega)}$. Определим двоякопериодическую функцию равенством ($\gamma = 1, 2, \dots$)

$$f_\gamma(u) = \left(\frac{\pi i}{\omega}\right)^\gamma \left[\frac{1}{(z - z^{-1})^\gamma} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{h^r z^{-1}}{1 - h^{2r}z^{-2}}\right)^\gamma + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{-h^r z}{1 - h^{2r}z^{2}}\right)^\gamma\right]. \tag{3.16}$$

При нечетных γ периодами являются 4ω, $2i\omega'$, при четных γ периодами являются 2ω, $2i\omega'$. Функция $f_2(u)$ с точностью до постоянного слагаемого совпадает с эллиптической функцией Вейерштрасса [35; гл. 2, § 12], сходимость ряда (3.16) рассмотрена в [35].

Теорема 3.4. *Пусть марковский процесс на множестве состояний* $\mathbb{N}^2$ *задан соотношениями* (3.10) *и* $h(s_1, s_2) = p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{00}$. *Положим*

$$C = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{1 + \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}\,, \qquad C_0 = \frac{p_{20}p_{00}}{1 - 4p_{20}p_{02}}\,;$$

$f_{\gamma_2}(u)$ – *эллиптическая функция* (3.16) *с полупериодами* $\omega=\pi\sqrt{C_0}$, $\omega'=-\sqrt{C_0}\ln C$; $T=\{u=x+iy,\ 0\leqslant x\leqslant 4\omega,\ y=-\omega'\}$ – *ориентированный по возрастанию* x *отрезок. Экспоненциальная производящая функция финальных вероятностей имеет вид*

$$g_{(0,\gamma_2)}(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_T e^{z_1 s_1(z)+z_2 s_2(z)}\frac{(-1)^{\gamma_2}}{-\gamma_2}\,df_{\gamma_2}(u),\quad \gamma_2=1,2,\ldots,\tag{3.17}$$

где $z=e^{\pi iu/(2\omega)}$ *и функции*

$$s_1(z)=\frac{1-\sqrt{1-4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}}i\sqrt{C_0}\left(z-\frac{1}{Cz}\right),\qquad s_2(z)=i\sqrt{C_0}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

представляют собой униформизацию римановой поверхности (3.14).

Обозначим $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ число финальных частиц типа T_2, которые останутся после того, как процесс выродился, т.е. не осталось частиц типа T_1. Случайная величина $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ имеет распределение $\{q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)},\ \gamma_2\in\mathbb{N};\ \sum_{\gamma_2=0}^{\infty}q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\leqslant 1\}$; выражения для $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ следуют из определения (3.11) функции $g_{(0,\gamma_2)}(z_1,z_2)$ и (3.17). Явные формулы для финальных вероятностей определяют вывод представляющих интерес для приложений [106], [84] предельных теорем для числа финальных частиц при условиях $\alpha_1\to\infty,\alpha_2\to\infty$.

В [61] получены решения уравнения (3.12) при других предположениях о производящей функции $h(s_1,s_2)$ распределения числа потомков взаимодействующей пары частиц.

3.3.2. Процесс эпидемии. На множестве $\mathbb{N}^2$ рассматривается марковский процесс $\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t))$, $t\in[0,\infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$; при $t\to 0+$ переходные вероятности имеют вид ($\mu>0$)

$$\begin{aligned}&P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=1-(\alpha_1\alpha_2+\mu\alpha_1)t+o(t),\\&P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=(p^2_{\beta_1-\alpha_1+1,\beta_2-\alpha_2+1}\alpha_1\alpha_2+p^1_{\beta_1-\alpha_1+1,\beta_2-\alpha_2}\mu\alpha_1)t+o(t),\end{aligned}\tag{3.18}$$

если $\alpha_1\neq\beta_1$ или $\alpha_2\neq\beta_2$. Заданы распределения вероятностей $\{p^2_{\gamma_1\gamma_2},\ p^2_{11}=0\}$, $\{p^1_{\gamma_1\gamma_2},\ p^1_{10}=0\}$. Второе уравнение Колмогорова для производящей функции $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2)$ в случае процесса $\xi(t)$ получает вид

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t}=\big(h_2(s_1,s_2)-s_1s_2\big)\frac{\partial^2F_\alpha(t;s)}{\partial s_1\partial s_2}+\mu\big(h_1(s_1,s_2)-s_1\big)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_1},\quad F_\alpha(0;s)=s^\alpha;$$

схема взаимодействий $T_1\to\gamma_1^1T_1+\gamma_2^1T_2$, $T_1+T_2\to\gamma_1^2T_1+\gamma_2^2T_2$.

Событие $\{\xi(t)=(\beta_1,\beta_2)\}$ означает наличие β_1 частиц типа T_1 и β_2 частиц типа T_2 в момент времени t. Следующее описание принято в вероятностных моделях распространения эпидемий [6], [4], [24], [5], [115]. Частицы типа T_1 интерпретируются как больные особи, частицы типа T_2 – как здоровые особи, восприимчивые к инфекционному заболеванию. Через случайное время $\tau^2_{(\beta_1,\beta_2)}$, $\mathsf{P}\{\tau^2_{(\beta_1,\beta_2)}\leqslant t\}=1-e^{-\beta_1\beta_2t}$, происходит контакт частицы типа T_1 с частицей типа T_2. Эта пара частиц превращается в новую группу из γ_1 частиц типа T_1 и γ_2 частиц типа T_2 с распределением $\{p^2_{\gamma_1\gamma_2}\}$;

процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\beta_1+\gamma_1-1,\beta_2+\gamma_2-1)$. Кроме того, через случайное время $\tau^1_{(\beta_1,\beta_2)}$, $\mathsf{P}\{\tau^1_{(\beta_1,\beta_2)}\leqslant t\}=1-e^{-\mu\beta_1 t}$, частица типа T_1 превращается в группу частиц с распределением $\{p^1_{\gamma_1\gamma_2}\}$; процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\beta_1+\gamma_1-1,\beta_2+\gamma_2)$. Случайные величины $\tau^1_{(\beta_1,\beta_2)}$, $\tau^2_{(\beta_1,\beta_2)}$ независимы; в состоянии (β_1,β_2) процесс находится случайное время $\tau_{(\beta_1,\beta_2)}=\min(\tau^1_{(\beta_1,\beta_2)},\tau^2_{(\beta_1,\beta_2)})$.

В работе [22] ветвящийся процесс $\xi(t)$ определялся как модель цепной реакции рождения нейтронов (частицы типа T_1) с учетом ядер тяжелых элементов (частицы типа T_2); в [22] полагалось $h_2(s_1,s_2)=h_2(s_1)$, $h_1(s_1,s_2)=1$.

Для процесса $\xi(t)$ состояния $(0,\gamma_2)$, $\gamma_2\in\mathbb{N}$, являются поглощающими (остались только здоровые особи). Для финальных вероятностей $q^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(0,\gamma_2)}=\lim_{t\to\infty}P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(0,\gamma_2)}(t)$, $\gamma_2\in\mathbb{N}$, вводим производящие функции ($|s|\leqslant 1$)

$$f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s)=\sum_{\gamma_2=0}^{\infty}q^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(0,\gamma_2)}s^{\gamma_2},\quad \Phi(z_1,z_2;s)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty}\frac{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!}f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s). \tag{3.19}$$

Аналогично теореме 3.1, исходя из уравнения (1.18), устанавливается уравнение для двойной производящей функции

$$\left[z_2\left(h_1\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}\right)+\mu\left(h_2\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2}\right)-\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right]\Phi(z_1,z_2;s)=0. \tag{3.20}$$

Из равенств для финальных вероятностей: $q^{(0,\gamma_2)}_{(0,\gamma_2)}=1$; $q^{(0,\gamma_2)}_{(0,\alpha_2)}=0$, если $\alpha_2\neq\gamma_2$, следует граничное условие $\Phi(0,z_2;s)=e^{z_2 s}$.

Интегральное представление для финальных вероятностей в случае $h_2(s_1,s_2)=s_1$, $h_1(s_1,s_2)=1$. Для процесса эпидемии Вейса [126], [114] уравнение (3.20) получает вид

$$z_2\Phi_{z_1z_2}+(\mu-z_2)\Phi_{z_1}-\mu\Phi=0. \tag{3.21}$$

Если начальное состояние рассматриваемого процесса $(\alpha_1,0)$, то происходит скачок в состояние $(\alpha_1-1,0)$; следовательно, финальные вероятности равны: $q^{(\alpha_1,0)}_{(0,0)}=1$ при $\alpha_1=0,1,\dots$; $q^{(\alpha_1,0)}_{(0,\gamma_2)}=0$ при $\alpha_1=0,1,\dots$ и $\gamma_2=1,2,\dots$. Отсюда $\Phi(z_1,0;s)=e^{z_1}$. Таким образом, для гиперболического уравнения (3.21) имеем задачу Гурса: заданы граничные условия на характеристиках $z_1=0$ и $z_2=0$, $\Phi(0,z_2;s)=e^{z_2 s}$, $\Phi(z_1,0;s)=e^{z_1}$. Уравнения в частных производных гиперболического типа, когда коэффициенты являются линейными функциями независимых переменных, рассматривались в [19] и [103; §41]. В работе [43] найдена функция Римана для уравнения (3.21) и получено явное решение

$$\Phi(z_1,z_2;s)=\int_0^\infty\left(1+\frac{1}{\mu}(s-1)e^{-x/\mu}z_2\right)e^{-x+(1-e^{-x/\mu}+se^{-x/\mu})z_2}J_0\big(2\sqrt{-z_1x}\,\big)\,dx. \tag{3.22}$$

Из определения (3.19) функции $\Phi(z_1,z_2;s)$ и (3.22), используя разложения в ряды

$$e^z=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{i!}\,,\qquad J_0(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(z/2)^{2j}}{j!\,j!}\,,$$

получаем интегральное представление

$$f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \frac{1}{\alpha_1!}\int_0^\infty x^{\alpha_1}\Big[(1-e^{-x/\mu}+se^{-x/\mu})^{\alpha_2} \\ + \frac{1}{\mu}\alpha_2(s-1)e^{-x/\mu}(1-e^{-x/\mu}+se^{-x/\mu})^{\alpha_2-1}\Big]e^{-x}\,dx.$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям; приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.5 [43]. *Пусть марковский процесс на множестве состояний* $\mathbb{N}^2$ *задан соотношениями* (3.18) *и* $h_2(s_1,s_2)=s_1$, $h_1(s_1,s_2)=1$. *Производящая функция финальных вероятностей имеет вид* ($\alpha_1 \neq 0$)

$$f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \frac{1}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty x^{\alpha_1-1}(1-e^{-x/\mu}+s\,e^{-x/\mu})^{\alpha_2}\,e^{-x}\,dx. \tag{3.23}$$

Пусть $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ – число финальных частиц типа T_2, которые останутся после остановки процесса. Производящая функция (3.23) задает распределение случайной величины $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ на состояниях $\{(0,\gamma_2),\ \gamma_2=0,\dots,\alpha_2\}$. Из (3.23) по формулам (1.4) и (1.5) получаем для среднего и дисперсии:

$$\mathsf{E}\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \alpha_2\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{\alpha_1}; \qquad \mathsf{D}\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)} \sim \alpha_2^2\left(\left(\frac{\mu}{2+\mu}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2\alpha_1}\right)$$

при $\alpha_2\to\infty$. Стандартным образом применив метод характеристических функций к выражению (3.23) (ср. [106; гл. 5, § 5], [41]), получаем предельную теорему – утверждение типа "пороговой теоремы" [6], [114].

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5. *Положим* $x\in[0,1]$. *Тогда*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\alpha_2}\leqslant x\right\} = \frac{1}{(\alpha_1-1)!}\int_{-\mu\ln x}^\infty y^{\alpha_1-1}e^{-y}\,dy.$$

Ряд предельных теорем для $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ установлен в [114].

В [43] получено решение уравнения (3.20) в случае $h_2(s_1,s_2)=p_{10}^2s_1+p_{01}^2s_2+p_{00}^2$, $h_1(s_1,s_2)=1$.

Детерминированное приближение. Взаимосвязь вероятностного и детерминистического описаний для различных марковских процессов эпидемии рассматривалась в [6], [10], [4] и др. Процессу эпидемии Вейса соответствует детерминированная модель в виде системы дифференциальных уравнений [126]

$$\dot{x}_1 = -\mu x_1, \qquad \dot{x}_2 = -x_1x_2,$$

где $x_1(t)$ – количество больных особей, $x_2(t)$ – количество особей, восприимчивых к инфекционному заболеванию.

3.3.3. Нерешенные задачи. Ниже сформулированы задачи о стационарных и финальных вероятностях для марковских процессов класса B_2 со схемами, наиболее близкими к схемам процессов класса B_1, исследованных в [106]. Постановка задач для общих схем взаимодействий возможна при условии классификации процессов класса B_2.

1. Для ветвящихся процессов класса B_1 в [106; гл. 4, § 6] дана классификация типов частиц. Выявить аналогичную классификацию типов частиц для ветвящихся процессов класса B_2.

2. Для процесса с иммиграцией из класса B_2 со схемой $0 \to k_0T$, $T \to k_1T$, $2T \to k_2T$ ([106; гл. 7], [121; § 9.1], [74]) второе уравнение Колмогорова имеет вид ($\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\rho > 0$)

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \lambda(h_2(s) - s^2)\frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2} + \mu(h_1(s) - s)\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial s} + \rho(h_0(s) - 1)F_i(t;s)$$

с начальным условием $F_i(0;s) = s^i$. Пусть среднее число появляющихся частиц при парном взаимодействии меньше двух, т.е. параметр критичности $a_2 = \lambda(h_2'(1) - 2) < 0$. Найти явные выражения для стационарного распределения марковского процесса при частных предположениях о производящих функциях $h_0(s)$, $h_1(s)$, $h_2(s)$.

3. Для ветвящегося процесса с двумя комплексами взаимодействия $T \to k_1T$, $2T \to k_2T$ первое уравнение Колмогорова имеет вид [59]

$$\frac{\partial G_j(t;z)}{\partial t} = \left[\lambda z^2\left(h_2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \mu z\left(h_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\right)\right]G_j(t;z), \quad G_j(0;z) = \frac{z^j}{j!}\,.$$

Получить интегральное представление для вероятности вырождения q_{i0}.

4. Для процесса из класса B_2 со схемой взаимодействий $T_1 \to \gamma_1^1T_1 + \gamma_2^1T_2$, $2T_2 \to \gamma_1^2T_1 + \gamma_2^2T_2$ первое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial G_\beta(t;z)}{\partial t} = \left[\lambda z_2^2\left(h_2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) + \mu z_1\left(h_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right]G_\beta(t;z),$$
$$G_\beta(0;z) = \frac{z^\beta}{\beta!}\,.$$

Найти вероятности вырождения $q_{(0,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $q_{(0,1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$.

5. Для ветвящегося процесса $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ из п. 3.3.1 рассмотрим средние $A_1(t) = \mathsf{E}\xi_1(t)$, $A_2(t) = \mathsf{E}\xi_2(t)$. В случае $h(s_1,s_2) = s_2h_1(s_1)$ нетрудно получить при начальном состоянии процесса (α_1,α_2): $A_1(t) = \alpha_1e^{\alpha_2a_1t}$, $A_2(t) = \alpha_2$, где $a_1 = \lambda((\partial h_1/\partial s_1)|_{s=1} - 1)$ – параметр критичности. Исследовать асимптотическое поведение средних $A_1(t)$, $A_2(t)$, когда $t \to \infty$, при других частных предположениях о производящей функции $h(s_1,s_2)$.

Найти интегральное представление для финальных вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ при произвольной функции $h(s_1,s_2)$.

6. Для процесса эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика $h_2(s_1,s_2)=s_1^2$, $h_1(s_1,s_2)=1$ [6], [24] и стационарное уравнение (3.20) имеет вид

$$z_2\Phi_{z_1z_2}-z_2\Phi_{z_1z_1}+\mu\Phi_{z_1}-\mu\Phi=0$$

с граничными условиями $\Phi(0,z_2;s)=e^{z_2s}$, $\Phi(z_1,0;s)=e^{z_1}$. Найти функцию Римана и интегральное представление для производящей функции $\Phi(z_1,z_2;s)$. Полученное в работах [28], [111] громоздкое выражение для финальных вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ малопригодно для асимптотического исследования.

Решить уравнение (3.20) в случае $h_2(s_1,s_2)=p_{20}^2s_1^2+p_{02}^2s_2^2+p_{10}^2s_1+p_{01}^2s_2+p_{00}^2$, $h_1(s_1,s_2)=p_2^1s_1^2+p_0^1$; граничные условия $\Phi(0,z_2;s)=e^{z_2s}$, $\Phi(z_1,0;s)=e^{z_1q}$, где q – ближайший к нулю корень уравнения $p_2^1s_1^2+p_0^1-s_1=0$.

7. Для марковского процесса "хищник–жертва" из § 2.3 найти интегральное представление для вероятности вырождения $q_{(0,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ путем рассмотрения стационарного первого уравнения Колмогорова.

Глава 4. Третье уравнение Колмогорова

Переходные вероятности марковских процессов со счетным множеством состояний удовлетворяют первой и второй системам дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3), которые являются *линейными*. Введенный в работе [71] марковский ветвящийся процесс описан как процесс эволюции частиц; исходя из предположения о независимости отдельных эволюционирующих частиц друг от друга, для производящей функции переходных вероятностей такого процесса в [71] получено *нелинейное* дифференциальное уравнение первого порядка. Авторы работы подчеркнули: "... замечание показывает, что наши 'ветвящиеся случайные процессы' по существу являются лишь частным случаем *марковских процессов со счетным числом состояний*. Для этого частного случая мы получим, однако, аналитический аппарат, значительно более эффективный, чем тот, который может быть развит для общего случая марковских процессов со счетным числом состояний" (выделение в тексте принадлежит авторам [71]). Тем самым работой [71] поставлены следующие вопросы. Имеются ли другие частные случаи марковских процессов со счетным числом состояний, переходные вероятности которых удовлетворяют нелинейному уравнению? Если примеры таких марковских процессов имеются, то каким образом из множества всех марковских процессов выделяются возможные специальные классы марковских процессов, переходные вероятности которых удовлетворяют нелинейным уравнениям разного типа?

Методы исследования ветвящихся случайных процессов получили глубокое развитие [106]. Некоторые положения теории марковских ветвящихся процессов кратко изложены в § 4.1, где дан один из возможных способов вывода нелинейного уравнения для производящей функции переходных вероятностей процесса. Нелинейное уравнение является следствием свойства ветвления.

В § 4.2 дан вывод третьего (нелинейного) уравнения для процессов из класса B_2 с парными взаимодействиями $2T\to kT$, $k=0,1$, и $2T\to 3T$; для таких процессов квадратичного типа найдены точные решения первого и второго уравнений Колмогорова. Обобщенное свойство ветвления переходных вероятностей выявлено путем построения замкнутых решений уравнений в частных производных параболического типа; использованы метод разделения переменных и формулы суммирования теории специальных функций. Полученные нелинейные дифференциальные уравнения являются уравнениями в частных производных первого порядка. Описанные способы построения решений линейных уравнений Колмогорова применимы к одномерным и многомерным марковским процессам рождения и гибели указанных в § 2.1 типов.

§ 4.1. Нелинейное уравнение теории ветвящихся процессов

Рассмотрим однородный во времени марковский процесс ξ_t, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ с переходными вероятностями $P_{ij}(t)$; инфинитезимальные характеристики $a_{ij} = (dP_{ij}(t)/dt)|_{t=0+}$, $i, j \in \mathbb{N}$, определим равенствами ($\lambda > 0$):

$$a_{ij} = i\lambda p_{j-i+1},\ j \geqslant i-1,\ j \neq i; \quad a_{ii} = -i\lambda; \quad a_{ij} = 0,\ j < i-1.$$

Здесь задано распределение вероятностей $\{p_k,\, k \in \mathbb{N};\, p_1 = 0\}$. С помощью производящих функций ($|s| < 1$)

$$F_i(t;s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \quad i \in \mathbb{N}; \qquad h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \tag{4.1}$$

вторая система уравнений записывается в виде

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \lambda(h(s) - s)\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial s}, \qquad F_i(0;s) = s^i. \tag{4.2}$$

Двойная производящая функция переходных вероятностей

$$\mathscr{F}(t;z;s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} F_i(t;s) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} P_{ij}(t) s^j = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(t;z) s^j \tag{4.3}$$

удовлетворяет уравнениям Колмогорова (1.18) и (1.19),

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda z \left(h\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathscr{F}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda(h(s) - s)\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial s}, \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e^{zs}. \tag{4.5}$$

Решение стандартными методами [63] линейного уравнения в частных производных первого порядка (4.2) приводит к *свойству ветвления* для рассматриваемого случайного процесса:

$$F_i(t;s) = F_1^i(t;s), \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

т.е. переходные вероятности удовлетворяют условию (см. [106; гл. 1, § 1, формула (5)])

$$P_{ij}(t) = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_i = j} P_{1j_1}(t) P_{1j_2}(t) \cdots P_{1j_i}(t). \tag{4.7}$$

Действительно, пусть функция $F_1(t;s)$ является решением уравнения (4.2) с начальным условием s; тогда подстановкой в (4.2) легко проверяется, что функция $F_1^i(t;s)$ удовлетворяет уравнению (4.2) с начальным условием s^i. Свойство ветвления (4.6) совместно с условием единственности $a = \lambda(h'(1) - 1) < \infty$ решения уравнения (4.2) рассмотрено в [33; гл. 5, § 4].

Из (4.6) имеем для двойной производящей функции

$$\mathscr{F}(t;z;s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} F_1^i(t;s) = e^{zF_1(t;s)}. \tag{4.8}$$

Подставляя выражение (4.8) в первое уравнение (4.4), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для производящей функции $F_1(t;s)$ (см. [106; гл. 1, §4, теорема 5], [33; гл. 5, §9, уравнение (9.1)]):

$$\frac{\partial F_1(t;s)}{\partial t} = \lambda\big(h(F_1(t;s)) - F_1(t;s)\big), \qquad F_1(0;s) = s. \tag{4.9}$$

Таким образом, для марковского процесса ξ_t из класса B_1 имеем три уравнения: первое и второе уравнения Колмогорова и нелинейное уравнение (4.9).

Процессу ξ_t соответствует схема превращений $T \to kT$; состояние процесса j интерпретируется как наличие j частиц типа T. Частица может дать потомство – совокупность из k частиц типа T с распределением вероятностей $\{p_k\}$; каждая из i начальных частиц в момент времени t имеет случайное число потомков $\xi_t^{(l)}$ $(l = 1, \dots, i)$, и справедливо соотношение [106; гл. 1, §2]

$$\xi_t = \xi_t^{(1)} + \dots + \xi_t^{(i)}. \tag{4.10}$$

Свойство ветвления переходных вероятностей (4.7) означает, что все случайные величины $\xi_t^{(l)}$, $l = 1, \dots, i$, независимы и одинаково распределены. В общей теории ветвящихся процессов строятся пространство элементарных событий, состоящее из описания эволюций каждой отдельной частицы из существовавших в промежуток времени $[0, t]$ – множество деревьев, и соответствующая вероятностная мера на деревьях [106; гл. 12]. На рис. 5 (§5.3) изображен пример реализации ветвящегося процесса в таком фазовом пространстве. Связь характеристик ветвящихся процессов с характеристиками случайных деревьев и лесов изучалась в [67] (см. также обзор литературы в [68; §1.9]).

Из первого и второго уравнений (4.4) и (4.5) следует

$$(h(s) - s)\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial s} - z\left(h\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathscr{F} = 0.$$

Подставляя в последнее равенство выражение (4.8), приходим к следующему уравнению для производящей функции $F_1(t;s)$:

$$(h(s) - s)\frac{\partial F_1}{\partial s} - (h(F_1) - F_1) = 0. \tag{4.11}$$

Отметим частные случаи свойства ветвления (4.6). Из данных в п. 2.1.1 явных решений уравнений Колмогорова имеем для процесса простой гибели линейного типа, когда $h(s) = 1$ $(a_{i,i-1} = i\lambda, a_{ii} = -i\lambda)$:

$$F_i(t;s) = (1 - e^{-\lambda t} + s\,e^{-\lambda t})^i, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Для процесса чистого рождения линейного типа, когда $h(s) = s^2$ $(a_{ii} = -i\lambda, a_{i,i+1} = i\lambda)$,

$$F_i(t;s) = \left(\frac{s\,e^{-\lambda t}}{1 - s\,(1 - e^{-\lambda t})}\right)^i, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Для процесса рождения и гибели линейного типа, когда $h(s) = p_0 + p_2 s^2$ $(a_{i,i-1} = i\lambda p_0, a_{ii} = -i\lambda, a_{i,i+1} = i\lambda p_2)$, выражение для $F_i(t;s)$ дано формулой (2.11).

§ 4.2. Ветвящийся процесс с парными взаимодействиями

Рассмотрим марковский процесс ξ_t, $t \in [0,\infty)$, на множестве состояний $\mathbb{N}$, принадлежащий классу B_2; инфинитезимальные характеристики процесса зададим равенствами ($\lambda > 0$):

$$a_{ij} = i(i-1)\lambda p_{j-i+2},\ j \geqslant i-2,\ j \neq i; \quad a_{ii} = -i(i-1)\lambda; \quad a_{ij} = 0,\ j < i-2, \tag{4.14}$$

где $\{p_k,\ k \in \mathbb{N};\ p_2 = 0\}$ – распределение вероятностей. Для производящей функции (4.1) переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ процесса ξ_t имеет место уравнение в частных производных второго порядка параболического типа:

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \lambda(h(s) - s^2)\frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2}\,, \qquad F_i(0;s) = s^i. \tag{4.15}$$

Двойная производящая функция (4.3) удовлетворяет уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda z^2\left(h\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathscr{F}\,, \qquad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda(h(s) - s^2)\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial s^2}\,, \qquad \mathscr{F}(0;z;s) = e^{zs}.$$

Отсюда следует равенство

$$(h(s) - s^2)\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial s^2} - z^2\left(h\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathscr{F} = 0. \tag{4.16}$$

Исследование уравнения (4.15) начато в работе [104]. Существование имеющего вероятностный смысл решения задачи Коши (4.15) следует из существования решения второй системы дифференциальных уравнений для переходных вероятностей [26], [30]. В [104] показано, что если параметр критичности $a = \lambda(h'(1) - 2) \leqslant 0$, то решение задачи (4.15) единственно и выполнено *условие регулярности* для ветвящегося процесса [106; гл. 1, § 5]: $\lim_{s\uparrow 1} F_i(t;s) \equiv 1$.

В работе [3] для критического ветвящегося процесса ($a = 0$) рассматривалось асимптотическое поведение при $t \to \infty$ вероятности $Q_i(t)$ продолжения процесса, $Q_i(t) = \mathsf{P}\{\xi_t > 0 \mid \xi_0 = i\} = 1 - F_i(t;0)$. Установлено, что $Q_2(t) = o(e^{-\delta t})$ для некоторого $\delta > 0$; в [3] к уравнению (4.15) применены методы операционного исчисления. В [54], [55] при $h(s) = s^4/2 + 1/2$ построено явное решение уравнения (4.15) и найдена точная асимптотика для $Q_i(t)$ в этом случае.

Далее приведены результаты, предварительное изложение которых дано в публикациях [47], [50]. При выводе нелинейного уравнения теории ветвящихся процессов основным является наличие свойства ветвления (4.6). Для ветвящегося процесса ξ_t со схемой $2T \to kT$ свойство (4.6) для переходных вероятностей не имеет места, однако удалось выявить аналог свойства (4.6) и обобщение уравнения (4.11).

Детерминированное приближение. В [88], [89] рассмотрены ветвящиеся процессы со схемами $2T \to 0$ ($h(s) = 1$) и $2T \to T$ ($h(s) = s$) при большом начальном числе частиц, в сравнении с законом действующих масс. Если $x(t)$ – количество реагента в момент времени t для бимолекулярной реакции со схемой $2T \to kT$, $k = 0, 1$ (в вероятностной модели $h(s) = p_0 + p_1 s$), то в формальной кинетике полагают справедливым закон [23]

$$\dot{x} = ax^2,$$

где a – константа скорости реакции ($a = \lambda(h'(1) - 2) < 0$).

4.2.1. Решение первого и второго уравнений для процесса гибели квадратичного типа. Для процесса гибели квадратичного типа, в котором $h(s) = p_0 + p_1 s$ $(a_{i,i-2} = i(i-1)\lambda p_0, a_{i,i-1} = i(i-1)\lambda p_1, a_{ii} = -i(i-1)\lambda)$, построение замкнутого решения линейного уравнения

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \lambda(p_0 + p_1 s - s^2)\frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2}, \qquad F_i(0;s) = s^i \tag{4.17}$$

приводит к интегральному представлению для $F_i(t;s)$, обобщающему формулу (4.12) для процесса гибели линейного типа.

Далее для функции двух переменных $H(v;s)$ используется обозначение $[H(v;s)]'_v = \partial H(v;s)/\partial v$. Мнимую единицу обозначим ω, $\omega^2 = -1$.

Теорема 4.1. *Пусть марковский процесс на множестве состояний* $\mathbb{N}$ *задан инфинитезимальными характеристиками* (4.14) *и* $h(s) = p_0 + p_1 s$. *Производящая функция переходных вероятностей имеет вид*

$$\begin{aligned} F_i(t;s) = 1 + \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \Biggl[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y - \cos 2v}} \\ \times \left(\frac{1}{2\pi\omega} \oint_{0+} \left(\frac{\frac{1}{2}p_1(\eta - 1) - \frac{1}{2}(1+p_0)\sqrt{1 - 2\eta y + \eta^2} + s}{\eta}\right)^i \right. \\ \left. \times \frac{d\eta}{\sqrt{1 - 2\eta y + \eta^2}}\right) dy\Biggr]'_v dv, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Доказательство. Рассматриваем уравнения в частных производных ($|s| < 1$)

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda z^2 \left(p_0 \mathscr{F} + p_1 \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial z^2}\right), \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda(p_0 + p_1 s - s^2)\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial s^2}, \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e^{zs}. \tag{4.20}$$

(a) *Метод разделения переменных*. Решение ищем в форме ряда Фурье

$$\mathscr{F}(t;z;s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \widetilde{C}_n(z) C_n(s) e^{-\lambda_n t}. \tag{4.21}$$

Подставив (4.21) в уравнения (4.19) и (4.20), получаем уравнения для функций $\widetilde{C}_n(z)$ и $C_n(s)$:

$$\lambda z^2(p_0 \widetilde{C}_n(z) + p_1 \widetilde{C}'_n(z) - \widetilde{C}''_n(z)) + \lambda_n \widetilde{C}_n(z) = 0, \tag{4.22}$$

$$\lambda(p_0 + p_1 s - s^2) C''_n(s) + \lambda_n C_n(s) = 0, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{4.23}$$

Дифференциальные уравнения (4.17) и (4.23) в случаях $p_0 = 0$ или $p_0 = 1$ исследовались в [88]. Следуя работе [88], показывается, исходя из условий на рассматриваемый марковский процесс, что для уравнения (4.23) имеет место краевое условие “$C_n(s)$ есть многочлен”. Тогда последовательность “собственных значений” $\lambda_n =$

$n(n-1)\lambda$, $n=0,1,\dots$ [64; ч. II, гл. 3, § 9.7], и каждому λ_n соответствует "собственная функция"

$$C_n(s)=C_n^{-1/2}\left(\frac{2s-p_1}{1+p_0}\right),$$

где $C_n^{-1/2}(s)$ – многочлены Гегенбауэра ([73], ср. уравнение (52.4) при $\sigma=-1/2$),

$$C_n^{-1/2}(s)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(-1/2)(-1/2+1)\cdots(-1/2+n-k-1)}{k!\,(n-2k)!}(2s)^{n-2k}. \qquad (4.24)$$

Соответственно уравнение (4.22) принимает вид

$$z^2(p_0\widetilde{C}_n(z)+p_1\widetilde{C}'_n(z)-\widetilde{C}''_n(z))+n(n-1)\widetilde{C}_n(z)=0 \qquad (4.25)$$

и сводится к уравнению Бесселя ([73], ср. уравнение (44.1) при $\alpha=-1/2$, $\beta=1$, $\gamma^2=-1$, $\nu=n-1/2$). Из условий на марковский процесс следует, что нас интересует аналитическое на всей комплексной плоскости решение; следуя [73],

$$\widetilde{C}_n(z)=-\sqrt{\pi(1+p_0)z}\,e^{p_1z/2}I_{n-1/2}((1+p_0)z/2),$$

где $I_{n-1/2}(z)$ – модифицированные функции Бесселя. Таким образом, искомый ряд (4.21) имеет вид

$$\mathscr{F}(t;z;s)=-\sqrt{\pi(1+p_0)z}\times\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{p_1z/2}I_{n-1/2}\left(\frac{(1+p_0)z}{2}\right)C_n^{-1/2}\left(\frac{2s-p_1}{1+p_0}\right)e^{-n(n-1)\lambda t}.$$

Значения A_n определяются из сравнения начального условия $\mathscr{F}(0;z;s)=e^{zs}$ с разложением Сонина для экспоненты ([73; формула (53.2)], [100; сумма (5.13.3.3)])

$$e^{zs}=-\sqrt{2\pi z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)I_{n-1/2}(z)C_n^{-1/2}(s).$$

Получаем $A_n=n-1/2$ и приходим к выражению

$$\mathscr{F}(t;z;s)=-\sqrt{\pi(1+p_0)z}\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)e^{p_1z/2}I_{n-1/2}\left(\frac{(1+p_0)z}{2}\right)C_n^{-1/2}\left(\frac{2s-p_1}{1+p_0}\right)e^{-n(n-1)\lambda t}. \qquad (4.26)$$

Сходимость ряда (4.26) при любых z, s и $t\in[0,\infty)$ следует из сходимости разложения Сонина.

(б) *Интегральное представление.* Воспользуемся следующими формулами ([99; интеграл (2.5.36.1)], [100; интеграл (2.17.1.7)]):

$$e^{-n(n-1)\lambda t}=\frac{e^{\lambda t/4}}{\sqrt{\pi\lambda t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/(\lambda t)}\cos(2n-1)v\,dv,\quad n=0,1,\dots,$$

$$\sin(2n-1)v=\frac{2n-1}{2\sqrt{2}}\int_{\cos 2v}^{1}\frac{P_{n-1}(y)\,dy}{\sqrt{y-\cos 2v}},\quad n=1,2,\dots,$$

3 УМН, т. 57, вып. 2

где $P_n(y)$ – многочлены Лежандра. Дифференцируя последнее выражение, получаем интегральное представление для экспоненты

$$e^{-n(n-1)\lambda t}=\frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/(\lambda t)}\biggl[\int_{\cos 2v}^{1}\frac{P_{n-1}(y)\,dy}{\sqrt{y-\cos 2v}}\biggr]'\,dv,\quad n=1,2,\dots. \tag{4.27}$$

Возьмем второе решение уравнения (4.25)

$$\widetilde{D}_n(z)=\sqrt{(1+p_0)z/\pi}\,e^{p_1z/2}K_{n-1/2}((1+p_0)z/2),$$

где $K_{n-1/2}(z)$ – функции Макдональда [8; гл. 7, § 2],

$$\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\,K_{n-1/2}(z)=e^{-z}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1+k)!}{k!\,(n-1-k)!(2z)^k}\,; \tag{4.28}$$

прямыми вычислениями, используя явные выражения (4.24) и (4.28), проверяется интегральное соотношение

$$C_n(s)=-\frac{2}{1+p_0}\,\frac{1}{2\pi\omega}\oint_{0+}\frac{e^{s\xi-p_1\xi}}{\xi^2}\widetilde{D}_n(\xi)\,d\xi,\qquad n=2,3,\dots, \tag{4.29}$$

где контур интегрирования обходит точку 0 на комплексной плоскости в положительном направлении.

В ряд (4.26) подставим интеграл (4.27) и заменим $C_n(s)$ на интеграл (4.29). Нетрудно обосновать законность перестановки знаков суммирования, интегрирования и дифференцирования; тогда

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(t;z;s)&=e^{p_1z/2}\operatorname{ch}\frac{(1+p_0)z}{2}+e^{p_1z/2}\operatorname{sh}\frac{(1+p_0)z}{2}\,\frac{2s-p_1}{1+p_0}\\
&\quad+\frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/(\lambda t)}\biggl[\int_{\cos 2v}^{1}\frac{1}{\sqrt{y-\cos 2v}}\biggl(\frac{1}{2\pi\omega}\oint_{0+}\frac{e^{s\xi+p_1z/2-p_1\xi/2}}{\xi^2}\\
&\quad\times\frac{2}{1+p_0}\sum_{n=2}^{\infty}\biggl(n-\frac12\biggr)\sqrt{\pi(1+p_0)z}\,I_{n-1/2}\biggl(\frac{(1+p_0)z}{2}\biggr)\\
&\quad\times\sqrt{\frac{(1+p_0)\xi}{\pi}}\,K_{n-1/2}\biggl(\frac{(1+p_0)\xi}{2}\biggr)P_{n-1}(y)\,d\xi\biggr)\,dy\biggr]_v'\,dv.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Суммируемый в (4.30) ряд с точностью до первого слагаемого совпадает с формулой сложения Гегенбауэра для цилиндрических функций ([73; последняя формула § 53], [100; сумма (5.10.3.5)]): при $|z|<|\xi|$, $|y|\leqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\biggl(n-\frac12\biggr)\sqrt{2\pi z}\,I_{n-1/2}(z)\sqrt{\frac{2\xi}{\pi}}\,K_{n-1/2}(\xi)P_{n-1}(y)=\frac{z\xi e^{-\sqrt{z^2+\xi^2-2z\xi y}}}{\sqrt{z^2+\xi^2-2z\xi y}}\,. \tag{4.31}$$

Подставляя сумму (4.31) в (4.30), после вычислений, связанных с первым слагаемым ряда, приходим к интегральному представлению

$$\mathscr{F}(t;z;s) = e^z + \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \left[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y - \cos 2v}} \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{2\pi\omega} \oint_{0+} e^{s\xi + p_1 z/2 - p_1 \xi/2 - (1+p_0)\sqrt{z^2+\xi^2-2z\xi y}/2} \frac{z d\xi}{\xi\sqrt{z^2+\xi^2-2z\xi y}} \right) dy \right]_v' dv.$$

В третьем интеграле делаем замену переменной $\xi = z/\eta$; получаем для двойной производящей функции выражение

$$\mathscr{F}(t;z;s) = e^z + \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \left[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y - \cos 2v}} \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{2\pi\omega} \oint_{0+} e^{z\eta^{-1}(s + p_1(\eta-1)/2 - (1+p_0)\sqrt{\eta^2+1-2\eta y}/2)} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2+1-2\eta y}} \right) dy \right]_v' dv.$$

Из определения (4.3) и разложения $e^{zx} = \sum_{i=0}^{\infty}(z^i/i!)\, x^i$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, приходим к (4.18). Теорема 4.1 доказана.

4.2.2. Третье уравнение для процесса гибели квадратичного типа. Интеграл по η в выражении (4.18) вычисляется с помощью производящей функции полиномов Лежандра

$$P_n(y) = \frac{1}{2\pi\omega} \oint_{0+} \frac{1}{\sqrt{1-2\eta y+\eta^2}} \frac{d\eta}{\eta^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \dots. \tag{4.32}$$

Для полиномов Лежандра справедливо также интегральное представление [34; гл. 5, § 24, формула (109)]:

$$P_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(y + \omega\sqrt{1-y^2}\,\cos\psi)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \dots.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $x = \omega(\psi + \pi/2)$. Тогда

$$P_n(y) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_T \frac{dx}{(y + \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{sh}\, x)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{4.33}$$

где $T = \{x = \omega u, \pi/2 \leqslant u \leqslant 5\pi/2\}$ – ориентированный по возрастанию u отрезок на комплексной плоскости. Представление (4.32) для $P_n(y)$ и интеграл (4.33) связаны заменой переменной $\eta = (\sqrt{1-y^2}e^x + 2y - \sqrt{1-y^2}e^{-x})/2$ (интегральные представления для полиномов Лежандра и соответствующие замены переменных рассматриваются в [34; гл. 1, § 8, п. 19]).

В интеграле (4.18) делаем замену переменной η. *Обобщенное свойство ветвления* для процесса гибели квадратичного типа имеет вид:

$$F_i(t;s) = \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)}$$
$$\times \left[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y-\cos 2v}} \left(\frac{1}{2\pi\omega} \int_T \varphi^i(x,y;s)\, dx \right) dy \right]_v' dv \tag{4.34}$$

с линейной по переменной s функцией

$$\varphi(x,y;s)=\frac{-\frac{1}{2}\bigl(p_0\sqrt{1-y^2}\,e^x+p_1(1-y)+\sqrt{1-y^2}\,e^{-x}\bigr)+s}{\frac{1}{2}\bigl(\sqrt{1-y^2}\,e^x+2y-\sqrt{1-y^2}\,e^{-x}\bigr)}\,.$$

Подставляя двойную производящую функцию

$$\mathscr{F}(t;z;s)=\frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/(\lambda t)} \times\left[\int_{\cos 2v}^{1}\frac{1}{\sqrt{y-\cos 2v}}\left(\frac{1}{2\pi\omega}\int_T e^{z\varphi(x,y;s)}\,dx\right)dy\right]_v'dv$$

в равенство (4.16), получаем нелинейное уравнение в частных производных первого порядка для производящей функции $\varphi(x,y;s)$:

$$(h(s)-s^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2-(h(\varphi)-\varphi^2)=(1+p_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,, \tag{4.35}$$

где $h(s)=p_0+p_1s$.

4.2.3. Третье уравнение для процесса рождения квадратичного типа. В случае процесса рождения, когда $h(s)=s^3$ ($a_{ii}=-i(i-1)\lambda$, $a_{i,i+1}=i(i-1)\lambda$), построение точного замкнутого решения уравнения

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t}=\lambda(s^3-s^2)\frac{\partial^2F_i(t;s)}{\partial s^2}\,,\qquad F_i(0;s)=s^i,$$

приводит к интегральному представлению для $F_i(t;s)$, обобщающему формулу (4.13) для процесса рождения линейного типа.

Теорема 4.2. *Пусть марковский процесс на множестве состояний* $\mathbb{N}$ *задан инфинитезимальными характеристиками* (4.14) *и* $h(s)=s^3$. *Производящая функция переходных вероятностей имеет вид* ($F_0(t;s)\equiv 1$)

$$F_i(t;s)=\frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/(\lambda t)} \times\left[\int_{\cos 2v}^{1}\frac{1}{\sqrt{y-\cos 2v}}\left(\frac{1}{2\pi\omega}\int_T s\varphi^{i-1}(x,y;s)\,dx\right)dy\right]_v'dv, \tag{4.36}$$

$i=1,2,\ldots,$ *где* $T=\{x=\omega u,\ \pi/2\leqslant u\leqslant 5\pi/2\}$ *– ориентированный по возрастанию* u *отрезок на комплексной плоскости, с дробно-линейной по переменной* s *функцией*

$$\varphi(x,y;s)=\frac{s\frac{1}{2}\bigl(\sqrt{1-y^2}\,e^x+2y-\sqrt{1-y^2}\,e^{-x}\bigr)}{1-s\frac{1}{2}\bigl(-\sqrt{1-y^2}\,e^x+1-y\bigr)}\,.$$

Доказательство. Выражения (2.9) для переходных вероятностей марковского процесса чистого рождения в квадратичном случае получают вид: $P_{0j}(t) = \delta_j^0$, $P_{1j}(t) = \delta_j^1$; $P_{ij}(t) = 0, i > j$;

$$P_{ij}(t) = \frac{(j-1)!\,(j-2)!}{(i-1)!\,(i-2)!} \times \sum_{n=i}^{j} \frac{(-1)^{n-i}(2n-1)(n+i-2)!}{(j-n)!\,(j+n-1)!\,(n-i)!} e^{-n(n-1)\lambda t}, \quad 2 \leqslant i \leqslant j. \tag{4.37}$$

Из определения (4.1) производящей функции $\mathscr{F}_i(t;s)$ и формулы (4.36) следует интегральное представление ($2 \leqslant i \leqslant j$)

$$P_{ij}(t) = \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \Bigg[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y-\cos 2v}} \bigg(\frac{1}{2\pi\omega} \int_T C_{j-2}^{j-i} \times \bigg(\frac{1}{2}(\sqrt{1-y^2}e^{x} + 2y - \sqrt{1-y^2}e^{-x})\bigg)^{i-1} \times \bigg(\frac{1}{2}(-\sqrt{1-y^2}e^{x} + 1 - y)\bigg)^{j-i} dx\bigg)\, dy\Bigg]_v' dv.$$

Доказательство теоремы состоит в вычислении трехкратного интеграла, что приводит к выражениям (4.37). Интеграл по x вычисляется непосредственно и дает линейную комбинацию многочленов Лежандра $P_n(y)$; затем используется интеграл (4.27). При $j = i, i+1, i+2$ вычисления легко приводят к выражениям для переходных вероятностей

$$P_{ii}(t) = e^{-i(i-1)\lambda t}, \quad P_{i,i+1}(t) = \frac{i-1}{2}\big(e^{-i(i-1)\lambda t} - e^{-(i+1)i\lambda t}\big),$$
$$P_{i,i+2}(t) = \frac{i(i+1)}{4(2i+1)}\big((i+1)e^{-i(i-1)\lambda t} - (2i+1)e^{-(i+1)i\lambda t} + ie^{-(i+2)(i+1)\lambda t}\big).$$

Далее применяем метод математической индукции по j. Теорема 4.2 доказана.

Уравнение для производящей функции $\varphi(x,y;s)$ следует из обобщенного свойства ветвления (4.36). Двойную производящую функцию

$$\mathscr{F}(t;z;s) = 1 + \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \times \Bigg[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y-\cos 2v}} \bigg(\frac{1}{2\pi\omega} \int_T \frac{s}{\varphi(x,y;s)}(e^{z\varphi(x,y;s)} - 1)\, dx\bigg)\, dy\Bigg]_v' dv$$

подставляем в равенство (4.16); приходим к третьему уравнению

$$(h(s) - s^2)\bigg(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\bigg)^2 - (h(\varphi) - \varphi^2) = \varphi^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,, \tag{4.38}$$

где $h(s) = s^3$. Для уравнений в частных производных (4.35) и (4.38) стандартными методами [63] находятся полные интегралы.

§ 4.3. Свойство ветвления и функция Грина для параболических уравнений

Полученные в § 4.2 нелинейные уравнения (4.35) для процесса гибели и (4.38) для процесса рождения отличаются множителем в правой части; это различие устраняется исследованием объединяющего случая – марковского процесса рождения и гибели квадратичного типа, в котором $h(s) = p_0 + p_1 s + p_3 s^3$. Для вывода третьего уравнения необходимо выявить обобщенное свойство ветвления, т.е. найти точное решение дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \lambda(p_0 + p_1 s + p_3 s^3 - s^2)\frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2}\,, \qquad F_i(0;s) = s^i, \tag{4.39}$$

в виде, аналогичном свойству ветвления (2.11) – искомое интегральное представление решения содержит дробно-линейную функцию переменной s.

Ж. Летесье и Г. Вален в цикле работ 1982–1995 гг. (см. [80]–[82] и др.) методом разделения переменных получили решения в виде рядов по специальным функциям второго уравнения Колмогорова для некоторых процессов рождения и гибели квадратичного, кубического и биквадратичного типов. Методами работы [120] можно показать, что имеющее вероятностный смысл (аналитическое в круге $|s| < 1$) решение уравнения (4.39) представимо рядом Фурье

$$F_i(t;s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n C_n(s) e^{-\lambda_n t}, \qquad |s| < 1, \tag{4.40}$$

где собственные значения $\lambda_n = n(n-1)\lambda K$, константа $K > 0$ выражается через эллиптический интеграл

$$\int \frac{ds}{\sqrt{p_0 + p_1 s + p_3 s^3 - s^2}}\,.$$

Уравнение для собственной функции $C_n(s)$,

$$(p_0 + p_1 s + p_3 s^3 - s^2) C_n''(s) + \lambda_n C_n(s) = 0, \tag{4.41}$$

принадлежит классу уравнений Гойна (уравнение Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками [9; гл. 15, § 3]).

Рассмотренное в п. 4.2.1 уравнение (4.23) для функции $C_n(s)$ принадлежит классу гипергеометрических уравнений (уравнение Фукса второго порядка с тремя особыми точками [7; гл. 2, § 6]). Возможность построения в п. 4.2.1 замкнутого решения (4.18) для параболического уравнения (4.17) определена рассмотрением функций, детально исследованных в теории специальных функций, – применены интегральные соотношения между гипергеометрическими функциями [101; гл. 7] и теорема сложения Гегенбауэра.

В случае уравнения (4.41) для специальных функций класса Гойна неизвестны интегральные соотношения, обобщающие таковые для гипергеометрических функций; не получены теоремы сложения для функций Гойна (см. обзор литературы в [112]). Неясны методы суммирования ряда (4.40) и построения замкнутого решения уравнения (4.39). Искомое интегральное представление для $F_i(t;s)$ содержит эллиптические функции.

Функция Грина. Обсудим полученные в теоремах 4.1 и 4.2 интегральные представления решений с точки зрения общей теории дифференциальных уравнений в частных производных. Допустим, что, следуя методу функции Грина для уравнений параболического типа [2; гл. 6, § 3.2], построено решение задачи (4.39)

$$F_i(t;s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t;\xi,s)\,\xi^i\,d\xi, \tag{4.42}$$

где

$$G(t;\xi,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(\xi)C_n(s)}{\|C_n\|^2} e^{-\lambda_n t} \tag{4.43}$$

– функция Грина; норма $\|C_n\|$ рассматривается в соответствующем пространстве функций [2], [120].

При доказательстве теорем 4.1 и 4.2 решена задача суммирования ряда (4.43); незамкнутое представление функции Грина сведено к замкнутому интегральному выражению. После подстановки найденного интеграла в (4.42) и замены переменной $\xi = \varphi(\bar{x};s)$ формула (4.42) получила вид

$$F_i(t;s) = \int \cdots \int_{\widetilde{T}} \widetilde{G}(t;\bar{x})\varphi^i(\bar{x};s)\,d\bar{x}. \tag{4.44}$$

При этом возможна такая подстановка переменных, что в представлении (4.44) функция φ является линейной или дробно-линейной по переменной s и многократный интеграл есть математическое ожидание (вероятностная интерпретация формулы (4.44) дана в § § 5.3, 5.4). Таким образом, найденные в теоремах 4.1 и 4.2 замкнутые решения представляют собой специальные случаи формулы (4.42). Отметим, что замкнутые выражения для функций Грина известны для параболических уравнений с постоянными коэффициентами [2].

4.3.1. Нерешенные задачи. Ниже приведены линейные уравнения Колмогорова для случаев, когда вывод интегрального представления решения и нелинейного уравнения, аналогичного уравнениям (4.35) и (4.38), возможен методами главы 4.

1. Получить третье уравнение для марковского процесса гибели на множестве состояний $\mathbb{N}$, первое и второе уравнения которого для двойной производящей функции имеют вид [62] ($\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} &= \lambda z^2\left(p_0\mathscr{F} + p_1\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial z^2}\right) + \mu z\left(\mathscr{F} - \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} &= \lambda(p_0 + p_1 s - s^2)\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial s^2} + \mu(1-s)\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial s}\,, \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e^{zs}.
\end{aligned}$$

2. Получить третье уравнение для процесса с иммиграцией частиц из класса B_2, уравнения Колмогорова для которого имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} &= \lambda z^2\left(\mathscr{F} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial z^2} - \mathscr{F}\right),\\
\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} &= \lambda(1-s^2)\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial s^2} + \mu(s^2-1)\mathscr{F}, \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e^{zs}.
\end{aligned}$$

Рассмотреть схему взаимодействий $2T_1 \to k_1T_1$, $k_1 = 0,1$; $0 \to k_0T_1$, $k_0 = 1,2$.

3. Получить третье уравнение для процесса с частицами финального типа, уравнения которого для двойной производящей функции имеют вид [60] ($\lambda > 0$)

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda z_1^2 \left(h_0\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z_1} h_1\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} h_2\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)\mathscr{F},$$
$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda(h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2) + s_1^2 h_2(s_2) - s_1^2)\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial s_1^2}, \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e^{zs}.$$

Рассмотреть более общую схему $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 0,1,2,3$.

4. Получить третье уравнение для процесса из п. 2.2.2 с взаимодействием частиц различных типов $T_1 + T_2 \to T_3$; линейные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda z_1 z_2 \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z_3} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial z_1 \partial z_2}\right), \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda(s_3 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial s_1 \partial s_2}, \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e^{zs}.$$

5. Для процесса простой гибели полиномиального типа первое и второе уравнения для двойной производящей функции переходных вероятностей имеют вид ($k = 3,4,\dots$)

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda z^k \left(\frac{\partial^{k-1} \mathscr{F}}{\partial z^{k-1}} - \frac{\partial^k \mathscr{F}}{\partial z^k}\right), \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \lambda(s^{k-1} - s^k)\frac{\partial^k \mathscr{F}}{\partial s^k}, \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e^{zs}.$$

Найти третье уравнение. Получить третье уравнение для произвольного процесса простой гибели из класса B_2.

Получить третье уравнение для процесса чистого рождения из класса B_2.

Глава 5. Принцип тождественности частиц и условия независимости

Определение и уравнения марковских процессов с взаимодействием связаны с положениями неравновесной статистической физики. В § 5.1 показано, что первая система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса из множества M_1 является цепочкой уравнений для α-частичных функций распределения $\{P_{\alpha\beta}(t),\ \beta \in \mathbb{N}^n\}$. В § 5.2 обсуждается применимость принципа тождественности частиц и теоремы Финетти–Хинчина о симметрии к выводу кинетического уравнения для одночастичной функции распределения и анализируются условия, при выполнении которых математическое описание неравновесных состояний физических систем взаимодействующих частиц может быть сведено к рассмотрению кинетического уравнения. В § 5.3 в качестве стохастической системы взаимодействующих частиц взята модель бимолекулярной реакции в виде марковского процесса. Рассмотрено фазовое пространство траекторий частиц, соответствующее случайному процессу с взаимодействием; кинетическое уравнение получено путем преобразования фазового пространства траекторий частиц к множеству лесов.

§ 5.1. Цепочка уравнений Боголюбова для марковской системы взаимодействующих частиц

В неравновесной статистической физике при рассмотрении систем взаимодействующих частиц применяют i-частичные функции распределения $F_i(t; x_1, \dots, x_i)$, которыми описывают расположение i частиц одного типа на фазовом пространстве $(-\infty, \infty)$ в момент времени t, $t \in [0, \infty)$. В работе [13] при общих предположениях получена *цепочка уравнений* для таких функций распределения

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = \Phi_i(x_1,\ldots,x_i;F_i) + \widetilde{\Phi}_{i+1}(x_1,\ldots,x_{i+1};F_{i+1}),\ \ i=1,2,\ldots, \tag{5.1}$$

где $\Phi_i(x_1,\ldots,x_i;F_i)$, $\widetilde{\Phi}_{i+1}(x_1,\ldots,x_{i+1};F_{i+1})$ – некоторые взаимосвязанные функционалы. В [13] указано на основной интерес к одночастичной функции распределения. Считается, что одночастичная функция распределения $F_1(t,x_1)$ удовлетворяет *кинетическому уравнению*, которое имеет вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = A(x_1;F_1), \tag{5.2}$$

где $A(x_1;F_1)$ – некоторый функционал. При известной функции $F_1(t;x_1)$ выражения для i-частичных функций распределения $F_i(t;x_1,\ldots,x_i)$ находят с помощью цепочки уравнений (5.1).

Системам уравнений вида (5.1) и кинетическим уравнениям вида (5.2) посвящена обширная литература, см. [96], [86], [87] и др. Для рассмотрения систем взаимодействующих частиц применяются и другие подходы, например, используются уравнения для двухчастичных функций распределения [91]. При описании систем с взаимодействием с помощью функций распределения часто вводится марковское свойство.

Марковские процессы с взаимодействием. Пусть процесс с взаимодействием на фазовом пространстве $\mathbb{N}^n$ задан набором $\varepsilon^1,\{p^1_\gamma\},\{\varphi^1_\alpha\},\ldots,\varepsilon^l,\{p^l_\gamma\},\{\varphi^l_\alpha\}$. Переходные вероятности $\{P_{\alpha\beta}(t),\ \beta\in\mathbb{N}^n\}$ определяют α-частичную функцию распределения. Многомерная производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t;s)$ представляет собой свертку α-частичной функции распределения. Пусть выполнены условия п. 1.1.1.

Утверждение 5.1. *Первая система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса из множества M_1 записывается в виде цепочки уравнений*

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l}\varphi^i_\alpha\Big(-F_\alpha(t;s)+\sum_\gamma p^i_\gamma F_{\alpha-\varepsilon^i+\gamma}(t;s)\Big),\quad \alpha\in\mathbb{N}^n. \tag{5.3}$$

Доказательство. Используем определение производящей функции (1.10), систему уравнений (1.2) и определение (1.8) инфинитезимальных характеристик марковского процесса с взаимодействием:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} &= \sum_\beta \frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt}s^\beta = \sum_\beta\Big(\sum_\gamma a_{\alpha\gamma}P_{\gamma\beta}(t)\Big)s^\beta\\ &= \sum_\beta\Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i\geqslant 0}\varphi^i_\alpha p^i_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i}P_{\gamma\beta}(t) - \sum_{i=1}^{l}\varphi^i_\alpha P_{\alpha\beta}(t)\Big)s^\beta\\ &= \sum_{i=1}^{l}\varphi^i_\alpha\Big(\sum_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i\geqslant 0}p^i_{\gamma-\alpha+\varepsilon^i}\sum_\beta P_{\gamma\beta}(t)s^\beta - \sum_\beta P_{\alpha\beta}(t)s^\beta\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{l}\varphi^i_\alpha\Big(\sum_\gamma p^i_\gamma F_{\alpha-\varepsilon^i+\gamma}(t;s) - F_\alpha(t;s)\Big).\end{aligned}$$

Утверждение 5.1 доказано.

Наличие для марковского процесса цепочки уравнений (5.3) позволяет ставить вопрос о возможности вывода уравнения вида (5.2) для марковского процесса. Для процессов класса B_1, $B_1 \subset M_1$, система нелинейных уравнений (1.22) для одночастичных производящих функций имеет вид (5.2).

§ 5.2. Теорема Финетти–Хинчина о симметрии и кинетическое уравнение

Определение 5.2. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$ называются *симметрично зависимыми* (*переставляемыми*), если все $i!$ перестановок последовательности $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i)$ имеют одинаковое совместное распределение, т.е.

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1,\, \xi_2 \leqslant x_2,\, \ldots,\, \xi_i \leqslant x_i\} = \mathsf{P}\{\xi_{j_1} \leqslant x_1,\, \xi_{j_2} \leqslant x_2,\, \ldots,\, \xi_{j_i} \leqslant x_i\}$$

для всех $i!$ перестановок $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & i \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_i \end{pmatrix}$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_i$.

Величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ образуют бесконечную последовательность симметрично зависимых случайных величин, если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$ для всех $i = 2, 3, \ldots$ являются симметрично зависимыми случайными величинами.

Теорема 5.3 (Б. де Финетти, А. Я. Хинчин [66], [117], [83]). *Пусть* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ – *вероятностное пространство*, $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_i(\omega), \ldots$ – *бесконечная последовательность симметрично зависимых случайных величин. Положим*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_i) = \mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \ldots, \xi_i \leqslant x_i\}.$$

Тогда существует случайная величина $\theta(\omega)$ *такая, что если положить*

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x \mid \theta = y\} = \varphi(x \mid y), \qquad \mathsf{P}\{\theta \leqslant x\} = H(x),$$

то справедливо соотношение

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 \mid y)\varphi(x_2 \mid y) \cdots \varphi(x_i \mid y)\, dH(y), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5.4}$$

Интеграл (5.4) записывается как математическое ожидание [117]

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1,\, \xi_2 \leqslant x_2,\, \ldots,\, \xi_i \leqslant x_i\} = \mathsf{E}\big(\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1 \mid \theta\}\mathsf{P}\{\xi_2 \leqslant x_2 \mid \theta\} \cdots \mathsf{P}\{\xi_i \leqslant x_i \mid \theta\}\big).$$

Таким образом, свойство переставляемости для бесконечной последовательности случайных величин эквивалентно свойству условной независимости и условной одинаковой распределенности. Доказательство теоремы 5.3 не дает способа построения соотношения (5.4). Совместную функцию распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ конечной последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$, вообще говоря, нельзя представить в виде (5.4).

Рассмотренные в § 5.1 i-частичные функции распределения $F_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_i)$ являются симметричными функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_i$ [13; гл. 2, § 6], поскольку микрочастицы одного типа неразличимы [36]. Применительно к i-частичным функциям интегральное представление (5.4) получает вид

$$F_i(t; x_1, x_2, \dots, x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 \mid y)\varphi(x_2 \mid y) \cdots \varphi(x_i \mid y)\, dH(t; y), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{5.5}$$

и задача вывода кинетического уравнения сводится к поиску осредняющей меры $H(t; y)$ и выводу уравнения для одночастичной условной функции распределения $\varphi(x \mid y)$ [49].

Условия независимости. Для применения теоремы о симметрии к системам взаимодействующих частиц определение таких систем должно быть строгим с точки зрения теории случайных процессов – должно быть определено *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$. В физической кинетике ряд принятых уравнений не являются строго определенными [79]. В теории марковских процессов были исследованы, в первую очередь, следующие кинетические уравнения: уравнение диффузионного процесса [69] и уравнение ветвящегося процесса [71], [106]. Диффузионный и ветвящийся процессы соответствуют вырождению формулы (5.5), когда осредняющая мера сосредоточена в единственной точке:

$$F_i(t; x_1, x_2, \dots, x_i) = F_1(t; x_1) F_1(t; x_2) \cdots F_1(t; x_i), \qquad i = 1, 2, \dots,$$

т.е. эволюции отдельных частиц в этих процессах не зависят друг от друга. Для марковского ветвящегося процесса система дифференциальных уравнений (1.22) для одночастичных производящих функций получена в [71], исходя из предположения (1.21) о независимости эволюций частиц.

При математическом описании физических процессов делаются определенные предположения о характере взаимосвязей (зависимости) между частицами. При вероятностном описании таких процессов основными являются допущения о независимости тех или иных событий друг от друга. “Понятие *независимости* $\langle \dots \rangle$ занимает в известном смысле центральное место в теории вероятностей. $\langle \dots \rangle$ Соответственно этому одной из важнейших задач философии естественных наук $\langle \dots \rangle$ являются выяснение и уточнение тех предпосылок, при которых какие-либо данные действительные явления можно рассматривать как независимые” [70]. В статистической физике при описании систем взаимодействующих частиц применяются следующие *условия независимости*: марковское свойство; корреляция между положениями микрочастиц ослабевает по мере увеличения расстояния между ними, т.е.

$$F_i(t; x_1, x_2, \dots, x_i) - F_1(t; x_1) F_1(t; x_2) \cdots F_1(t; x_i) \to 0,$$

когда все $|x_k - x_l| \to \infty$ [13; гл. 1, § 1]; независимое протекание акта столкновения микрочастиц в разреженном газе. Последнее условие используется в кинетическом уравнении Больцмана [79], [102].

Определенное в § 1.3 множество M_1 марковских процессов с взаимодействием выделяется из множества M всех марковских процессов условием независимости: *результат взаимодействия комплекса частиц* S_{ε^i}, $\varepsilon^i \in A$, *не зависит от наличия других частиц*. Применительно к процессам с дискретными состояниями это условие введено в [79] для бимолекулярных процессов, когда $|\varepsilon^i| = 2$, $\varepsilon^i \in A$, и в [104] для ветвящихся процессов с взаимодействием.

Сделаем предположение: для марковских процессов с взаимодействием α-частичные функции распределения $\{P_{\alpha\beta}(t),\, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ обладают свойствами симметрии, поскольку при определении этих процессов введена тождественность частиц одного типа.

§ 5.3. Преобразование фазового пространства траекторий частиц для системы с взаимодействием к множеству деревьев

Рассмотрим процесс с взаимодействием из класса B_2 со схемой $2T \to kT$: однородный марковский процесс ξ_t, $t \in [0,\infty)$, на фазовом пространстве $\mathbb{N}$, определяемый набором $\varepsilon = 2$, $\{p_k,\, k \in \mathbb{N};\, p_2 = 0\}$, $\{\varphi_i = i(i-1)\lambda,\, i \in \mathbb{N},\, \lambda > 0\}$. Первая система дифференциальных уравнений Колмогорова записывается в виде цепочки уравнений

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = -i(i-1)\lambda F_i(t;s) + i(i-1)\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_{i-2+k}(t;s), \qquad i = 0, 1, \ldots;$$

производящая функция $F_i(t;s)$ является сверткой распределения $\{P_{ij}(t),\, j \in \mathbb{N}\}$.

Состояние i процесса ξ_t интерпретируем как наличие i частиц типа T в некоторой физической системе. Через случайное время τ_i, $\mathsf{P}\{\tau_i \leqslant t\} = 1 - e^{-i(i-1)\lambda t}$, в системе происходит взаимодействие каких-либо двух из i имеющихся частиц. Этот комплекс из двух частиц превращается в совокупность из k частиц (потомков) типа T с распределением вероятностей $\{p_k\}$ – что соответствует переходу марковского процесса ξ_t из состояния i в состояние $i-2+k$; далее аналогичная эволюция. Для математического описания такой системы взаимодействующих частиц можно построить пространство элементарных событий, состоящее из описания эволюций каждой отдельной частицы, существовавшей в системе (пространство траекторий частиц), и соответствующую вероятностную меру (меру на траекториях частиц). Обозначим это вероятностное пространство $(\Omega^{\mathrm{tr}}, \mathscr{A}^{\mathrm{tr}}, \mathsf{P}^{\mathrm{tr}})$. На рис. 4 изображен пример реализации процесса с взаимодействием частиц в фазовом пространстве Ω^{tr}.

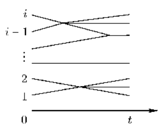

Рис. 4. Реализация случайного процесса с взаимодействием частиц

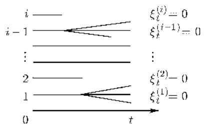

Рис. 5. Преобразование фазового пространства к множеству деревьев

Преобразуем фазовое пространство траекторий частиц к множеству деревьев следующим образом: потомство любой пары взаимодействующих частиц приписываем одной частице из этой пары. Тогда получаем для каждой из i начальных частиц случайное число потомков $\xi_t^{(l)}$ ($l = 1, \ldots, i$; см. рис. 5) и соотношение

$$\xi_t = \xi_t^{(1)} + \cdots + \xi_t^{(i)}. \tag{5.6}$$

В силу неразличимости частиц можно предполагать, что случайные величины $\xi_t^{(l)}$ переставляемы (симметрично зависимы). Равенство (5.6) позволяет конкретизировать предположение об условной независимости и условной одинаковой распределенности:

$$\begin{aligned}F_i(t;s) &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j = \mathsf{E}(s^{\xi_t} \mid \xi_0 = i) = \mathsf{E}s^{\xi_t^{(1)}+\dots+\xi_t^{(i)}} = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(s^{\xi_t^{(1)}+\dots+\xi_t^{(i)}} \mid \theta_t)\big)\\ &= \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(s^{\xi_t^{(1)}} \mid \theta_t)\cdots\mathsf{E}(s^{\xi_t^{(i)}} \mid \theta_t)\big) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(s^{\xi_t^{(1)}} \mid \theta_t)\big)^i\\ &= \int_{\{\omega\in\Omega^{\mathrm{tr}}\}} \varphi^i(\omega;s)\,H(t;d\omega),\end{aligned} \tag{5.7}$$

$i \in \mathbb{N}$, где θ_t – случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega^{\mathrm{tr}}, \mathscr{A}^{\mathrm{tr}}, \mathsf{P}^{\mathrm{tr}})$, существование которой следует из теоремы 5.3. Вид зависимости функции $\varphi(\omega;s)$ от переменной s связан со структурой траекторий (см. § 5.4), а функция $H(t;d\omega)$ определяет случайную среду [1], соответствующую рассматриваемому марковскому процессу. Отметим, что соотношение (5.6) совпадает с соотношением (4.10) для марковского процесса из класса B_1 и интегральное представление (5.7) для i-частичной производящей функции обобщает свойство ветвления (4.6) [15] процесса с независимыми частицами.

Преобразование фазового пространства траекторий к множеству лесов возможно с выполнением равенства (5.6) для произвольной системы взаимодействующих частиц. В случае непрерывного фазового пространства для вывода интегрального представления вида (5.7) для i-частичных функций распределения используются производящие функционалы [13], [106]. Принцип тождественности частиц [36] и свойства симметрии являются наиболее общими содержательными положениями неравновесной статистической физики.

Кинетические уравнения. Нахождение интегрального представления (5.7) вероятностными методами затруднительно из-за сложности пространства траекторий $(\Omega^{\mathrm{tr}}, \mathscr{A}^{\mathrm{tr}}, \mathsf{P}^{\mathrm{tr}})$. Для марковского процесса с парными взаимодействиями ξ_t обобщенное свойство ветвления (5.7) для производящей функции $F_i(t;s)$ выявлено аналитическими методами в главе 4, где построены замкнутые решения второго уравнения Колмогорова. В п. 4.2.2 найдены осредняющая мера и кинетическое уравнение (4.35) для одночастичной производящей функции $\varphi(x,y;s)$ условных переходных вероятностей в случае бимолекулярной реакции $2T \to kT$, $k = 0,1$. В п. 4.2.3 дано аналогичное нелинейное уравнение первого порядка (4.38) для функции $\varphi(x,y;s)$ в случае схемы взаимодействий $2T \to 3T$. Многократный интеграл в формулах (4.34) и (4.36) интерпретируется в соответствии с теоремой 5.3 как математическое ожидание.

Проблема вывода кинетического (третьего) уравнения для марковских процессов с взаимодействием разрешима через построение точных решений в виде интегрального представления (5.7) линейных уравнений Колмогорова для конкретных частных случаев. Данные в настоящей статье примеры таких решений дают возможность сделать предположение о типах нелинейных уравнений для различных классов марковских процессов: для B_1 это система обыкновенных дифференциальных уравнений; для B_2 это система уравнений в частных производных первого порядка; для B_3 это система интегральных уравнений типа уравнений восстановления (об уравнениях восстановления см. [106; гл. 8, § 7]); для множества M_1 это система стохастических интегральных уравнений.

§ 5.4. Свойство ветвления для процесса простой гибели

Простейшим марковским процессом из множества M_1 является процесс гибели ξ_t, $t \in [0,\infty)$, на фазовом пространстве $\mathbb{N}$, определяемый набором $\varepsilon = 1$, $\{p_0 = 1\}$, $\{\varphi_0 = 0, \varphi_i > 0,\ i = 1,2,\dots\}$. Уравнения Колмогорова для двойной производящей функции переходных вероятностей $\mathscr{F}(t;z;s)$ имеют вид (уравнения (2.6) и (2.7))

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = z(\mathscr{F} - D_z(\mathscr{F})), \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = (1-s)D_s(\mathscr{F}), \quad \mathscr{F}(0;z;s) = e(zs). \tag{5.8}$$

В начальном состоянии i процесс ξ_t находится случайное время τ_i с распределением $\mathsf{P}\{\tau_i \leqslant t\} = 1 - e^{-\varphi_i t}$. В момент τ_i происходит переход процесса в состояние $i-1$ и так далее. Пример реализации случайного процесса ξ_t изображен на рис. 6.

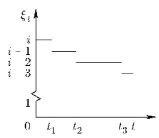

Рис. 6. Процесс гибели при фазовом пространстве $\mathbb{N}$

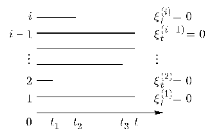

Рис. 7. Процесс гибели при фазовом пространстве Ω_{tr}

Состояние процесса i интерпретируем как наличие i частиц одного типа, переход процесса в состояние $i-1$ есть гибель одной из частиц; имеем схему $T \to 0$. Пример реализации процесса гибели при фазовом пространстве траекторий частиц Ω^{tr} изображен на рис. 7. Случайные величины $\xi_t^{(l)}$ (число потомков для каждой из начальных частиц, $l = 1,\dots,i$) принимают значения либо 0, либо 1. Предполагая переставляемость случайных величин в сумме (5.6), имеем для случая бесконечной последовательности симметрично зависимых случайных величин, принимающих только значения 0 и 1 (ср. [26; т. 2, гл. 7, § 4]),

$$F_i(t;s) = \mathsf{E}(X_t + sY_t)^i, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{5.9}$$

где X_t, Y_t – некоторые взаимосвязанные случайные процессы.

Теорема 5.4. *Пусть для марковского процесса гибели $\varphi_{i+1} > \varphi_i$, $i \in \mathbb{N}$, и $\lim_{i\to\infty} \varphi_i = \infty$. Двойная производящая функция переходных вероятностей представима рядом Фурье*

$$\mathscr{F}(t;z;s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1 \cdots \varphi_n} \widetilde{C}_n(z) C_n(s) e^{-\varphi_n t}, \tag{5.10}$$

где

$$\widetilde{C}_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n+k}}{(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\cdots(\varphi_{n+k} - \varphi_n)},$$

$$C_n(s) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{k+1}\cdots\varphi_n}{(\varphi_k - \varphi_n)\cdots(\varphi_{n-1} - \varphi_n)}\, s^k.$$

Ряд (5.10) абсолютно сходится при любых z, $|s| < 1$ и $t \in [0,\infty)$.

Доказательство. Используем определение двойной производящей функции (2.5) и явные выражения (2.8) для переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ процесса гибели:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(t;z;s) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^i}{\varphi_1\cdots\varphi_i}P_{ij}(t)s^j\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\sum_{n=j}^{i}\frac{z^i}{\varphi_1\cdots\varphi_j}\,\frac{e^{-\varphi_n t}}{(\varphi_i-\varphi_n)\cdots(\varphi_{n+1}-\varphi_n)(\varphi_{n-1}-\varphi_n)\cdots(\varphi_j-\varphi_n)}\,s^j\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\varphi_n t}}{\varphi_1\cdots\varphi_n}\left(z^n+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{z^i}{(\varphi_{n+1}-\varphi_n)\cdots(\varphi_i-\varphi_n)}\right)\\ &\quad\times\left(s^n+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\varphi_{j+1}\cdots\varphi_n}{(\varphi_j-\varphi_n)\cdots(\varphi_{n-1}-\varphi_n)}s^j\right).\end{aligned}$$

Сходимость ряда для $\mathscr{F}(t;z;s)$ следует из оценки

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^i}{\varphi_1\cdots\varphi_i}P_{ij}(t)s^j\right| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|z|^i}{\varphi_1\cdots\varphi_i}\,|s|^j \leqslant \frac{1}{1-|s|}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|z|^i}{\varphi_1\cdots\varphi_i}<\infty,$$

для любых z и $|s|<1$. Теорема 5.4 доказана.

Для процесса гибели линейного типа, в котором $\varphi_i = i\lambda$, ряд (5.10) легко суммируется и приводит к свойству ветвления (4.12),

$$\mathscr{F}(t;z;s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z/\lambda)^n}{n!}e^{z/\lambda}(s-1)^n\,e^{-n\lambda t} = e^{(z/\lambda)(1+(s-1)e^{-\lambda t})}.$$

Для процесса квадратичного типа, в котором $\varphi_i = i(i-1)\lambda$, ряд (5.10) суммирован в п. 4.2.1. Таким образом, задача обоснования вероятностного предположения о наличии обобщенного свойства ветвления (5.9) для марковского процесса гибели сводится к аналитической задаче суммирования ряда (5.10) – при тех или иных предположениях о функции $\varphi_i = \varphi(i)$, $i\in\mathbb{N}$.

Отметим, что решение (5.10) уравнений (5.8), содержащих оператор Гельфонда–Леонтьева обобщенного дифференцирования, имеет вид ряда экспонент [78]. При $t=0$ получаем разложение собственной функции (2.2):

$$e(zs) = \sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_1\cdots\varphi_n)^{-1}\widetilde{C}_n(z)C_n(s);$$

функции $\widetilde{C}_n(z)$ и $C_n(s)$ связаны интегральным преобразованием.

Множеству M_1 принадлежит также процесс чистого рождения. Аналогично предшествующему случаю, рассматривая фазовое пространство Ω^{tr}, приходим к предположению, что для такого процесса интегральное представление (5.7) i-частичной производящей функции переходных вероятностей имеет вид [53]

$$F_i(t;s) = \mathsf{E}\left(\frac{sY_t}{1-sX_t}\right)^i, \qquad i\in\mathbb{N},$$

где X_t, Y_t – взаимосвязанные случайные процессы.

ТЕОРЕМА 5.5. *Для процесса рождения пуассоновского типа имеет место свойство ветвления в виде* ($\omega^2 = -1$; $i = 2, 3, \dots$)

$$F_i(t;s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi\omega} \oint_{0+} \left[\int_0^\infty \left[\varphi^i(x,\eta,u;s) \frac{1+\eta}{1-x} \right]_\eta' d\eta \right]_x' \frac{e^{\lambda t(ux-1)}}{u} \, du \right) dx,$$

с дробно-линейной по переменной s функцией

$$\varphi(x,\eta,u;s) = \frac{s(1-x)/(1+\eta)}{1 - s(1/u + \eta(1-x)/(1+\eta))}\,.$$

Теорема 5.5 доказывается прямыми вычислениями трехкратного интеграла, что приводит к выражениям для переходных вероятностей пуассоновского процесса: $P_{ij}(t) = 0$, $0 \leqslant j < i$; $P_{ij}(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i}/(j-i)!$, $j \geqslant i \geqslant 1$. В вычислениях используется бета-функция [44], [52].

5.4.1. Нерешенные задачи. Предположение о нелинейном свойстве (5.7) для марковских процессов требует подтверждения в первую очередь в случаях, когда явные выражения для переходных вероятностей $P_{\alpha\beta}(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, либо известны, либо могут быть найдены хотя бы для некоторых значений α и β.

1. Выявить нелинейное свойство переходных вероятностей (5.9) для процесса гибели степенного типа, в котором $\varphi_i = i^\rho \lambda$, $0 < \rho < 1$ ($\lambda > 0$).

2. Для двухмерного процесса гибели [76], [77] квадратичного типа второе уравнение Колмогорова для производящей функции переходных вероятностей имеет вид

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \lambda(p_{10}s_1 + p_{01}s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t;s)}{\partial s_1 \partial s_2}\,, \qquad F_\alpha(0;s) = s^\alpha.$$

Получить обобщенное свойство ветвления

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2) = \mathsf{E}(X_t + s_1 Y_t)^{\alpha_1} (Z_t + s_2 U_t)^{\alpha_2}, \qquad (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{N}^2,$$

где X_t, Y_t, Z_t, U_t – взаимосвязанные случайные процессы. Для двухмерного процесса рождения, второе уравнение которого имеет вид

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \lambda(p_{21}s_1^2 s_2 + p_{12}s_1 s_2^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t;s)}{\partial s_1 \partial s_2}\,, \qquad F_\alpha(0;s) = s^\alpha,$$

получить свойство

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2) = \mathsf{E} \left(\frac{s_1 Y_t}{1 - s_1 X_t} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{s_2 U_t}{1 - s_2 Z_t} \right)^{\alpha_2}, \qquad (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{N}^2.$$

3. Для марковского процесса рождения и гибели пуассоновского типа получить, используя явные выражения для переходных вероятностей (2.10), интегральное представление для i-частичной производящей функции

$$F_i(t;s) = \mathsf{E} \left(\frac{X_t + sY_t}{Z_t + sU_t} \right)^i, \qquad i \in \mathbb{N},$$

где X_t, Y_t, Z_t, U_t – некоторые случайные процессы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В.И. Афанасьев Случайные блуждания и ветвящиеся процессы в случайной среде // Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН, 2000.
[2] В.М. Бабич, М.Б. Капилевич, С.Г. Михлин, Г.И. Натансон, П.М. Риз, Л.Н. Слободецкий, М.М. Смирнов Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.
[3] И.С. Бадалбаев, А.В. Дряхлов Об асимптотическом поведении вероятности продолжения ветвящегося процесса с парными взаимодействиями частиц // Теория вероятн. и ее примен. 1996. Т. 41. №4. С. 721–737.
[4] Н. Бейли Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970.
[5] N.T.J. Bailey The Mathematical Theory of Infectious Diseases and its Applications. London: Griffin, 1975.
[6] М.С. Бартлетт Введение в теорию случайных процессов. М.: ИЛ, 1958.
[7] Г. Бейтмен, А. Эрдейи Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
[8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
[9] Г. Бейтмен, А. Эрдейи Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.
[10] А.Т. Баруча-Рид Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969.
[11] А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.
[12] П.П. Бочаров, А.В.Печинкин Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
[13] Н.Н. Боголюбов Проблемы динамической теории в статистической физике. М.–Л.: Гостехиздат, 1946.
[14] Р.В. Бойко О степенном росте мицелиальных колоний в моделях, построенных на базе ветвящихся с переменным режимом процессов // Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. С. 17–23.
[15] Ветвления условие // Математическая физика. Энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. С. 84.
[16] Ветвящийся процесс с взаимодействием частиц // Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. С. 104.
[17] R.A. Carmona, S.A. Molchanov Parabolic Anderson problem and intermittency // Mem. Amer. Math. Soc. 1994. V. 108. №518. P. 125.
[18] Чжун Кай Лай Однородные цепи Маркова. М.: Наука, 1964.
[19] E.T. Copson Partial Differential Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975.
[20] С.А. Демидов, А.В. Калинкин, Л.А. Стрыгина Ветвящийся процесс со схемой взаимодействий частиц вида "хищник–жертва" // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 1999. Т. 6. №1. С. 137–138.
[21] В.И. Дорогов, В.П. Чистяков Оценка флуктуаций нуклидов в нейтронном потоке методами теории ветвящихся процессов // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. №5. С. 1102–1104.
[22] В.И. Дорогов, В.П. Чистяков Вероятностные модели превращения частиц. М.: Наука, 1988.
[23] Н.М. Эмануэль, Д.Г. Кнорре Курс химической кинетики. М.: Высшая школа, 1974.
[24] Эпидемии процесс // Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. С. 1008.
[25] G. Fayolle, R. Iasnogorodski, V. Malyshev Random Walks in the Quarter-Plane. Algebraic Methods, Boundary Value Problems and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1999. (Appl. Math. V. 40.)
[26] В. Феллер Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.

[27] W. Feller Infinitely divisible distributions and Bessel functions associated with random walks // SIAM J. Appl. Math. 1966. T. 14. C. 864–875.

[28] J. Gani On a partial differential equation of epidemic theory. I // Biometrika. 1965. T. 52. C. 617–622.

[29] А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. 1951. Т. 29 (71). № 3. С. 477–500.

[30] И. И. Гихман, А. В. Скороход Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.

[31] Ю. И. Громак, В. А. Малышев Вероятность попадания в конечное множество при блуждании в квадранте с поглощением на границе // Междунар. конф. по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. Вильнюс, 1973. С. 185–186.

[32] К. Г. Гуревич, В. Ф. Матвеев Уравнение Бейли для производящей функции однородного марковского процесса и его применение // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 2001. Т. 8. № 2. С. 42–51.

[33] Т. Харрис Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.

[34] Е. В. Гобсон Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.

[35] А. Гурвиц Теория аналитических и эллиптических функций. Л.: ГТТИ, 1933.

[36] Тождественности принцип. Тождественные частицы // БСЭ. Изд. 3-е. Т. 26. М.: Советская энциклопедия, 1977. С. 30–31.

[37] M. E. H. Ismail, J. Letessier, G. Valent Linear birth and death models and associated Laguerre and Meixner polynomials // J. Approx. Theory. 1988. V. 55. P. 337–348.

[38] M. E. H. Ismail, J. Letessier, G. Valent Quadratic birth and death processes and associated continuous dual Hahn polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. № 3. P. 727–737.

[39] А. В. Калинкин Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27. № 1. С. 192–197.

[40] А. В. Калинкин Стационарное распределение системы взаимодействующих частиц с дискретными состояниями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 6. С. 1362–1364.

[41] А. В. Калинкин Финальные вероятности для ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1309–1312.

[42] А. В. Калинкин Структура множества марковских процессов // Вестник РУДН. Сер. прикл. матем. и информ. 1998. № 1. С. 93–103.

[43] А. В. Калинкин Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии // Теория вероятн. и ее примен. 1998. Т. 43. № 4. С. 773–780.

[44] А. В. Калинкин Свойство ветвления для процесса гибели пуассоновского типа // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 1. С. 177–178.

[45] А. В. Калинкин О работах советских математиков по основаниям физической статистики 30–40-х гг. // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 1999. Т. 6. № 1. С. 148–150.

[46] А. В. Калинкин Проблема точных решений уравнений Колмогорова для марковских процессов с дискретными состояниями // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Естеств. науки". 1999. № 1. С. 14–24.

[47] А. В. Калинкин О нелинейных уравнениях для специальных классов марковских процессов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Естеств. науки". 1999. № 2. С. 59–70.

[48] А. В. Калинкин Уравнения процесса гибели и размножения и оператор Гельфонда–Леонтьева обобщенной производной // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 2000. Т. 7. № 1. С. 106–107.

[49] А. В. Калинкин Теорема Финетти–Хинчина о симметрии в неравновесной статистической физике // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 4. С. 457–460.

[50] А. В. Калинкин Третье уравнение Колмогорова для ветвящегося процесса с взаимодействием частиц // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 2. С. 159–162.

[51] А. В. Калинкин Метод экспоненциальной производящей функции для случайных блужданий в четверти плоскости // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 5. С. 583–587.

[52] A. V. Kalinkin Branching property for a Poisson-type death process // J. Math. Sci. 2000. V. 99. № 3. P. 1261–1266.

[53] А. В. Калинкин Является ли пуассоновский процесс ветвящимся процессом? // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 2000. Т. 7. №2. С. 355–356.
[54] А. В. Калинкин Асимптотика вероятности продолжения для одного критического ветвящегося процесса с парными взаимодействиями частиц // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 2000. Т. 7. №2. С. 493.
[55] А. В. Калинкин Точные решения уравнений Колмогорова для критического ветвящегося процесса с двумя комплексами взаимодействия частиц // УМН. 2001. Т. 56. №3. С. 173–174.
[56] А. В. Калинкин Курс теории марковских процессов // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 2001. Т. 8. №1. С. 198–200.
[57] А. В. Калинкин Уравнения марковского процесса, уравнения формальной кинетики и уравнения движения твердого тела около неподвижной точки // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 2001. Т. 8. №1. С. 200–201.
[58] A. V. Kalinkin Markov's model of the two-sex population // Dynamics of Non-Homogeneous Systems: Proceedings of ISA RAS. V. 4. Moscow: Editorial URSS, 2001. P. 75–81.
[59] А. В. Калинкин О вероятности вырождения ветвящегося процесса с двумя комплексами взаимодействия частиц // Теория вероятн. и ее примен. 2001. Т. 46. №2. С. 376–381.
[60] А. В. Калинкин Третье уравнение для ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 0, 1$ // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2001. Т. 8. №2. С. 766–767.
[61] А. В. Калинкин Вероятность остановки на границе случайного блуждания в четверти плоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием частиц // Теория вероятн. и ее примен. 2002. Т. 47. №3 (в печати).
[62] A. Kalinkin, G. Valent Exact solution of the linear Kolmogorov equations for a quadratic death process // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 1998. Т. 5. №2. С. 304–305.
[63] Э. Камке Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
[64] Э. Камке Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
[65] А. Я. Хинчин Математические основания статистической механики. М.: Гостехиздат, 1943.
[66] А. Я. Хинчин О классах эквивалентных событий // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85. №4. С. 713–714.
[67] В. Ф. Колчин Случайные отображения. М.: Наука, 1984.
[68] В. Ф. Колчин Случайные графы. М.: Физматлит, 2000.
[69] А. Н. Колмогоров Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН. 1938. Т. 5. С. 5–41. Пер. с нем.: Math. Ann. 1931. V. 104. P. 415–458.
[70] А. Н. Колмогоров Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
[71] А. Н. Колмогоров, Н. А. Дмитриев Ветвящиеся случайные процессы // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56. №1. С. 7–10.
[72] Л. Г. Косолапова, Б. Г. Ковров Эволюция популяций. Дискретное математическое моделирование. Новосибирск: Наука, 1988.
[73] Д. С. Кузнецов Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965.
[74] А. М. Ланге Об одном ветвящемся процессе с иммиграцией и взаимодействием частиц // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2001. Т. 8. №2. С. 785–786.
[75] W. Ledermann, G. E. H. Reuter Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1954. V. 246. P. 321–369.
[76] C. Lefevre, P. Picard Abel–Gontcharoff pseudopolynomials and the exact final outcome of sir epidemic model. III // Adv. Appl. Probab. 1999. V. 31. №2. P. 532–550.
[77] C. Lefevre, P. Picard On the algebraic structure in Markovian processes of death and epidemic types // Adv. Appl. Probab. 1999. V. 31. №3. P. 742–757.
[78] А. Ф. Леонтьев Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
[79] М. А. Леонтович Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // ЖЭТФ. 1935. Т. 5. №3–4. С. 211–231.

[80] J. Letessier, G. Valent The generating function method for quadratic asymptotically symmetric birth and death processes // SIAM J. Appl. Math. 1984. V. 44. P. 773–783.

[81] J. Letessier, G. Valent Exact eigenfunctions and spectrum for several cubic and quartic birth and death processes // Phys. Lett. A. 1985. V. 108. №5–6. P. 245–247.

[82] J. Letessier, G. Valent Some exact solutions of the Kolmogorov boundary value problem // Approx. Theory Appl. 1988. V. 4. №2. P. 97–117.

[83] M. Лоэв Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.

[84] В. А. Малышев Случайные блуждания. Уравнения Винера–Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. М.: Изд-во МГУ, 1970.

[85] В. А. Малышев Уравнения Винера–Хопфа и их применение в теории вероятностей // Итоги науки и техники. Сер. “Теория вероятн. Матем. статист. Теоретич. киберн.”. Т. 13. М.: ВИНИТИ, 1975. С. 5–35.

[86] В. П. Маслов, С. Э. Таривердиев Асимптотика уравнений Колмогорова–Феллера для системы из большого числа частиц // Итоги науки и техники. Сер. “Теория вероятн. Матем. статист. Теоретич. киберн.”. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1982. С. 85–124.

[87] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М.: Изд-во УРСС, 2000.

[88] D. A. McQuarrie, C. J. Jachimowcki, M. E. Russel Kinetic of small system. II // J. Chim. Phys. 1964. V. 40. №10. P. 2914–2921.

[89] D. A. McQuarrie Stochastic approach to chemical kinetics // J. Appl. Probab. 1967. V. 4. P. 413–478.

[90] А. А. Могульский, Б. А. Рогозин Случайные блуждания в положительном квадранте. I. Локальные теоремы; II. Интегральные теоремы; III. Константы в интегральной и локальных теоремах // Матем. труды. 1999. Т. 2. №2. С. 57–97; 2000. Т. 3. №1. С. 48–118; 2001. Т. 4. №1. С. 68–93.

[91] А. Н. Морозов Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.

[92] Г. Николис, И. Пригожин Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

[93] P. R. Parthasarathy Density-dependent Markov branching processes // Mathematical Ecology: Proceedings of the Autumn Course Research Seminars, Miramare–Trieste, 1986. New York, 1988. P. 559–569.

[94] Н. В. Перцев Вероятностная модель инфекционного заболевания // Препринт № 462. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.

[95] Н. В. Перцев Математическое моделирование динамики взаимодействующих популяций с ограниченным временем жизни индивидуумов // Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Новосибирск: ВЦ СО АН, 1999.

[96] Д. Я. Петрина, В. И. Герасименко, П. В. Малышев Математические основы классической статистической механики. Киев: Наукова думка, 1981.

[97] Н. В. Пиляева Об одном разложимом ветвящемся процессе с частицами финального типа // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. вероятн., статист. 2000. Т. 7. №1. С. 128–129.

[98] А. К. Полин Предельные теоремы для разложимых критических ветвящихся процессов // Матем. сб. 1976. Т. 100. №3. С. 420–435.

[99] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

[100] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

[101] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.

[102] Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977.

[103] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И.Маричев Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

[104] Б. А. Севастьянов О некоторых типах марковских процессов // УМН. 1949. Т. 4. №4. С. 194.

[105] Б. А. Севастьянов Теория ветвящихся случайных процессов // УМН. 1951. Т. 6. №6. С. 47–99.
[106] Б. А. Севастьянов Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
[107] Б. А. Севастьянов Ветвящиеся процессы со взаимодействием частиц // Третья междунар. Вильнюсская конф. по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. Т. II. Вильнюс: ИМК АН ЛитССР, 1981. С. 139–140.
[108] Б. А. Севастьянов, А. В. Калинкин Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. №2. С. 306–308.
[109] В. И. Шематович Нестационарное статистическое моделирование столкновительных физико-химических процессов в разреженном газе // Автореф. дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1980.
[110] Я. Г. Синай Случайное блуждание со случайным потенциалом // Теория вероятн. и ее примен. 1993. Т. 38. №2. С. 457–460.
[111] V. Siskind A solution of the general stochastic epidemic // Biometrika. 1965. V. 52. №3–4. P. 613–616.
[112] С. Ю. Славянов Структурная теория уравнений и специальных функций класса Гойна // Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. СПб.: СПбГУ, 1996.
[113] М. М. Смирнов Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975.
[114] А. Н. Старцев О распределении размера эпидемии в одной немарковской модели // Теория вероятн. и ее примен. 1996. Т. 41. №4. С. 827–839.
[115] Stochastic Processes in Epidemic Theory: Proceedings of a Conference held in Liminy, France, 1988. New York: Springer-Verlag, 1990. (Lecture Notes in Biomathematics. V. 86.)
[116] Л. А. Стрыгина Статистическое моделирование процесса “хищник–жертва” при дискретных состояниях // Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, кафедра высшей математики, 1999.
[117] Л. Такач Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.
[118] Two-sex problem // Encyclopedia of Statistical Sciences. T. 9. New York: Wiley, 1988. C. 373.
[119] В. В. Учайкин, В. В. Рыжов Стохастическая теория переноса частиц высоких энергий. Новосибирск: Наука, 1988.
[120] G. Valent An integral transform involving Hein functions and a related eigenvalue problem // SIAM J. Math. Anal. 1986. T. 17. №3. C. 688–703.
[121] Н. Г. Ван Кампен Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
[122] В. А. Ватутин, А. М. Зубков Ветвящиеся процессы // Итоги науки и техники. Сер. “Теория вероятн. Матем. статист. Теоретич. киберн.”. Т. 23. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 3–67; Ч. II // J. Soviet Math. 1993. V. 67. №6. P. 3407–3485.
[123] В. Вольтерра Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
[124] W. A. O’N. Waugh Uses of the sojourn time series for Markovian birth process // Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. 3. Univ. of California, 1970, 1972. P. 501–514.
[125] W. A. O’N. Waugh Taboo extinction, sojourn times, and asymptotic growth for the Markovian birth and death process // J. Appl. Probab. 1972. V. 9. P. 486–506.
[126] G. Weiss On the spread of epidemics by carries // Biometrics. 1965. V. 21. №2. P. 481–490.

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: kalinkin@mx.bmstu.ru

Поступила в редакцию
21.02.2001